EXAMEN #2 UAM-Azcapotzalco.

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO (Otoño 2013).

(1). Tenemos la función $f(x) = \sqrt{4x+1}$, que evaluada en $x=0$ y $x=2$ alcanza los valores:

$$f(2) = \sqrt{4\cdot 2+1} = \sqrt{9} = 3$$

$$f(0) = \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = 1$$

Entonces el cambio promedio es

$$\bar{f} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{3-1}{2-0} = \frac{2}{2} = 1.$$

$$\boxed{\bar{f} = 1}$$

(2)(a) Calcular $\lim\limits_{y\to 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6}$,

Tanto el numerador y el denominador son polinomios, y como y^2+5y+6 en $y=2$, es $2^2+5\cdot 2+6 = 20 \neq 0$, entonces podemos sustituir directamente:

$$\lim_{y\to 2} \frac{y+2}{y^2+5y+6} = \frac{2+2}{2^2+5\cdot 2+6} = \frac{4}{20} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$=1=$

2(b): $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5h+4} - 2}{h}$.

No podemos usar substitución directa, porque tanto el denominador y el numerador se anulan en $h=0$. Multipliquemos y dividimos por su conjugado.

$$\frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} = \frac{\sqrt{5h+4}-2}{h} \cdot \frac{(\sqrt{5h+4}+2)}{\sqrt{5h+4}+2}$$

$$= \frac{(5h+4)-2^2}{h(\sqrt{5h+4}+2)} =$$

$$= \frac{5h}{h(\sqrt{5h+4}+2)}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2}$$

Ahora sí podemos substituir directamente:

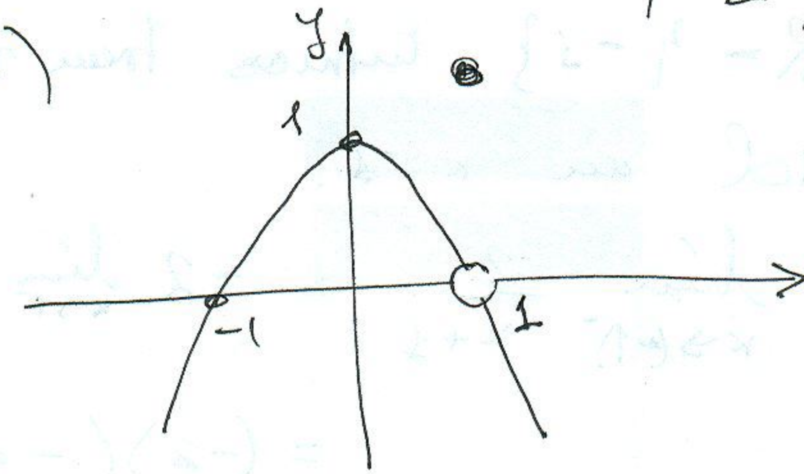
$$\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{5h+4}}{h} \underset{h \neq 0}{=} \lim_{h \to 0} \frac{5}{\sqrt{5h+4}+2} = \frac{5}{\sqrt{0+4}+2}$$

$$= \frac{5}{2+2} = \boxed{\frac{5}{4}}.$$

---

(3) Tenemos $f(x) = \begin{cases} 1-x^2, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$

(a)



(b) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (1-x^2) = 0.$

y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (1-x^2) = 0$

Entonces $\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = 0}$

(c) Si existe y es $\lim_{x \to 1} f(x) = 0$, pues los límites laterales coinciden

---

Pero $f(x)$ es discontinua en $x=1$, pues $f(1) = 2 \neq \lim_{x \to 1} f(x) = 0.$

---

(4) Consideremos $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ Entonces tiene una asíntota vertical en $x = -1$.

Ahora $\lim_{x \to (-1)^-} \frac{2x}{x+1} = -2 \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} =$

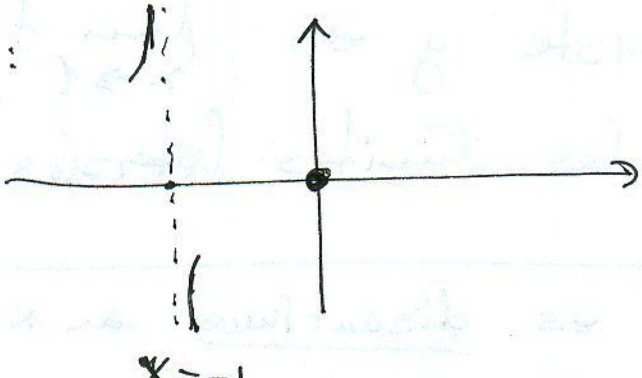
$= (-2)(-\infty)$.

$= +\infty$

$\lim_{x \to (-1)^+} \frac{2x}{x+1} = -2 \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{x+1} = -2(+\infty)$

$= -\infty$

~~Por~~ También $f(0) = 0$: Por el momento, tenemos:

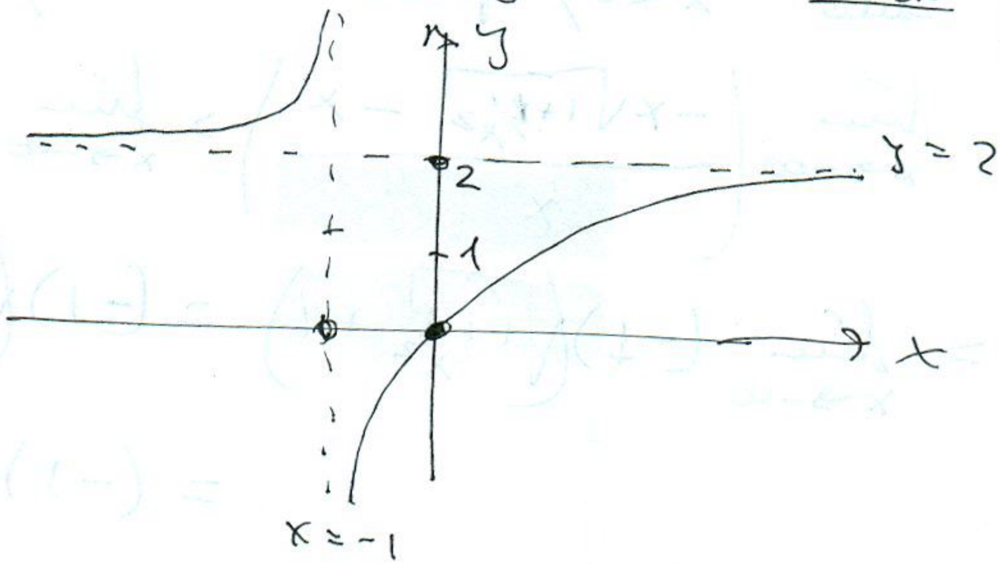


$x = -1$

Ahora: $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{1 + 1/x} = 2.$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{x+1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{1 + 1/x} = 2.$

Se concluye tal que $y = 2$ es asíntota horizontal



y es un esbozo de la gráfica de $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

---

(5) De substitución directa resulta:

$$\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} \sim \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = \frac{|x|-x}{x}.$$

pero como $x<0$, pues $x \longrightarrow -\infty$

$$= \frac{-x-x}{x} = -\frac{2x}{x} \longrightarrow -2$$

Entonces
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x}\right) = -2.$$

De forma <u>RIGUROSA</u>:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}{x}\right).$$

y caso $x<0$, pues $x \longrightarrow -\infty$; $\Rightarrow |x| = -x$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x\sqrt{1+\cancel{1}/x^2}-x}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}(-1)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1\right) = (-1)\left(\sqrt{1+0}+1\right)$$

$$= (-1)\cdot 2$$

$$= -2$$

Mismo resultado
