EXAMEN #2 — UAM-Azcapotzalco

CÁLCULO DIFERENCIAL. (Otoño 2013)

(1). Tenemos la ley:

$$P(t) = R(t)\, I^2(t)$$

(a) Usando la ley del producto..

$$\frac{dP}{dt} = \frac{dR}{dt} I^2 + R \frac{d}{dt}\left(I^2\right)$$

$$= \frac{dR}{dt} I^2 + R\, 2\cdot I \frac{dI}{dt}$$, por la regla de la cadena

entonces

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = I^2 \frac{dR}{dt} + 2IR \frac{dI}{dt}}$$

(b) Si P es constante, $\frac{dP}{dt} = 0$, entonces

$$\boxed{I^2 \frac{dR}{dt} + 2IR \frac{dI}{dt} = 0}$$

o si $I \neq 0$:

$$\boxed{I \frac{dR}{dt} + 2R \frac{dI}{dt} = 0.}$$

$$\frac{dR}{dt} = \frac{-2R\,d[illegible]}{I\,d[illegible]}$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2P}{I^3}\frac{dI}{dt}$$ ó $$\frac{dR}{dt} = -\frac{2RI^2}{I^3}\frac{dI}{dt}$$

$$\cancel{\frac{dR}{dt} = \frac{-2P}{I^3}\frac{dI}{dt}}$$

(2) Tenemos:

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 3$$

Entonces $f'(x) = 4x + 4$

(a) $$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2(x_0+\Delta x)^2 + 4(x_0+\Delta x) - \cancel{3} - (2x_0^2 + 4x_0 - \cancel{3})$$

$$= 2(x_0+\Delta x)^2 + 4(x_0+\Delta x) - (2x_0^2 + 4x_0)$$

$$= 2(\cancel{x_0^2} + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 4(\cancel{x_0} + \Delta x) - (\cancel{2x_0^2} + \cancel{4x_0})$$

$$= 2(2x_0\Delta x + \Delta x^2) + 4\Delta x.$$

$$= (4x_0\Delta x + 2\Delta x^2) + 4\Delta x$$

$$= (4x_0 + 2\Delta x)\Delta x + 4\Delta x$$

$$= [(4x_0 + 2\Delta x) + 4]\Delta x$$

Si $x_0 = -1$:

$$\Delta f = [(4(-1) + 2\Delta x) + 4]\Delta x$$

$$= [(-4 + 2\Delta x) + 4]\Delta x$$

$$= (2\Delta x)\Delta x = 2(\Delta x)^2$$

Y como $\Delta x = \frac{1}{10}$: $\Delta f = 2\left(\frac{1}{10}\right)^2$

= 2 =

$$\Rightarrow \boxed{\Delta f = \frac{2}{100}}$$

(b) $df = f'(x_0)\,\Delta x = (4x_0 + 4)\,\Delta x$

$= 4(x_0+1)\,\Delta x$

Pero $x_0 = -1$. Entonces

$$df = 4(x_0+1)\,\Delta x = 4(-1+1)\,\Delta x$$

$$\boxed{df = 0}$$

(c) El error es:

$$|\Delta f - df| = |\Delta f - 0| = |\Delta f| = 2\frac{1}{10^2}$$

$$\boxed{|\Delta f - df| = \frac{2}{100}}$$

que coincide con $|\Delta f|$, pues $df = 0$.

---

(3) Tenemos que la distancia vertical recorrida es

$$s(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + s_0$$

Su derivada: $s'(t) = -gt + v_0$.

Ahora $s'(t) > 0$, si $-gt + v_0 > 0 \Rightarrow v_0 > gt$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{v_0}{g} > t}.$$

$s'(t) < 0$ si $-gt + v_0 < 0 \Rightarrow v_0 < gt$

$\Rightarrow \frac{v_0}{g} < t$

Entonces $S'(t)$ cambia de signo en $\boxed{t = \frac{v_0}{g}}$

Si $t < \frac{v_0}{g} \Rightarrow S'(t) > 0 \Rightarrow S$ crece.

si $t > \frac{v_0}{g} \Rightarrow s'(t) < 0 \Rightarrow S$ decrece

$\Rightarrow$ $s(t) = s\left(\frac{v_0}{g}\right)$ es un máximo.

Tenemos pues que: $t = \frac{v_0}{g} = \frac{5m/seg}{10m/seg^2} = \frac{1}{2}$ seg.

y $s(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + s_0$

$= -5t^2 + 5t + 2$

$s\left(\frac{1}{2}\right) = -5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2 = -\frac{5}{4} + \frac{5}{2} + 2$

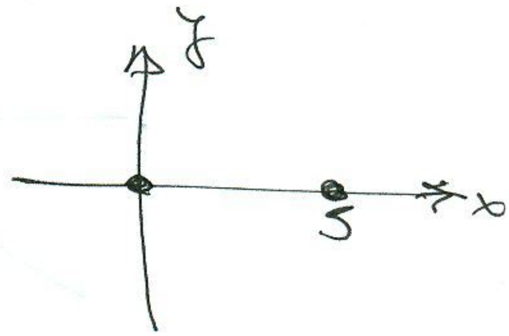
$= \frac{-5 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 4}{4} = \frac{-5 + 10 + 8}{4}$

$\boxed{s\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4} \text{ metros}}$ es la altura máxima

(4). Tenemos la función

$$f(x) = x^{2/3}(x-5)$$

Notemos que $\left.\begin{array}{l} f(5) = 0 \\ f(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$



Ahora $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}(x-5) + x^{2/3}$

$$= x^{-1/3}\left(\frac{2}{3}(x-5) + x\right)$$

$$= x^{-1/3}\left(\frac{5}{3}x - \frac{10}{3}\right)$$

$$= \frac{5}{3}x^{-1/3}(x-2).$$

Luego

$$f'(x) = \frac{5}{3}\,\frac{x-2}{x^{1/3}}.$$

Entonces $f'(x) = 0$, si $\boxed{x = 2}$

Notar que $f'(x)$ <u>no</u> está definida en $\boxed{x = 0}$.

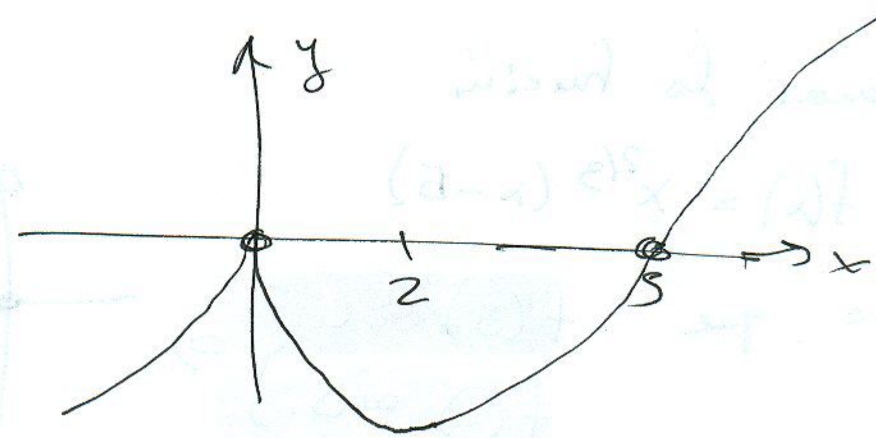
Entonces:

Si $x < 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ x^{1/3} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) > 0.$

Si $0 < x < 2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2 < 0 \\ x^{1/3} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) < 0$

Si $2 < x \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-2 > 0 \\ x^{1/3} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) > 0:$

Así:



Falta determinar concavidades:

Tenemos: $f(x) = x^{2/3}(x-5)$

$$f'(x) = \frac{5}{3}\,\frac{x-2}{x^{1/3}} \Rightarrow f''(x) = \frac{5}{3}\cdot\frac{(x^{1/3})(1) - (x-2)\frac{1}{3}x^{-2/3}}{x^{2/3}}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{5}{3}\,\frac{x^{1/3} - (x-2)\frac{x^{-2/3}}{3}}{x^{2/3}} = \frac{5}{3}\,\frac{x^{-2/3}}{3}\left(\frac{3x-(x-2)}{x^{2/3}}\right)$$

$$= \frac{5}{9}\,\frac{1}{x^{2/3}\cdot x^{2/3}}(3x - x + 2) = \frac{5}{9x^{4/3}}(2x+2)$$

$$= \frac{10}{9}\,\frac{x+1}{x^{4/3}}.$$

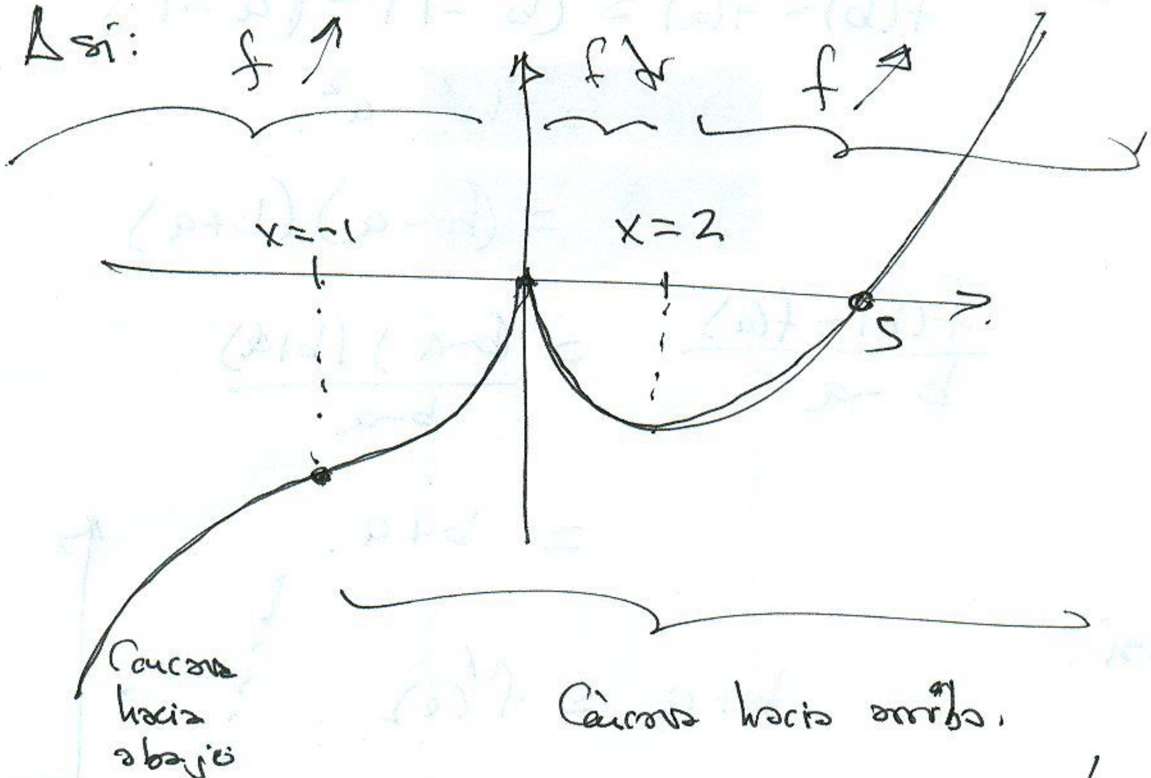
Notemos que $f''(x) = 0$, si $x = -1$, entonces $\boxed{x=-1}$ es un punto de inflexión

Ahora, el denominador $x^{4/3} > 0$, si $x \neq 0$.

Así $f''(x) > 0$, si $x > -1 \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba.

$\Rightarrow f''(x) < 0$, si $x < -1 \Rightarrow$ f es cóncava hacia abajo

Así:



y es como la vista en clase.

---

f(2) es mínimo local f(2) =

f(0) = 0 es máximo local

$f(2) = 2^{2/3}(2-5) = -3(4)^{1/3}$. es mínimo local.

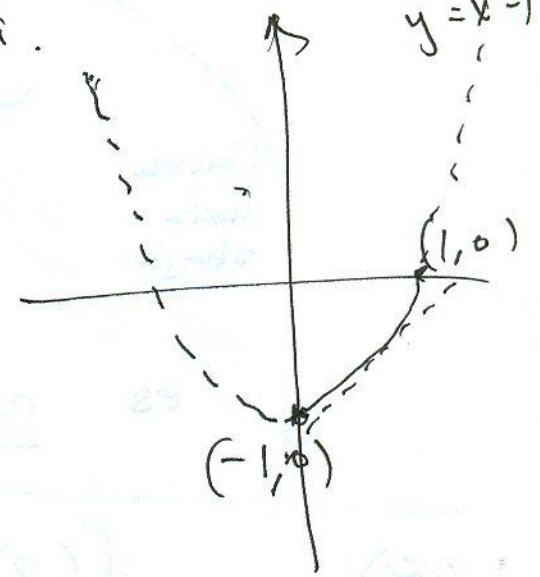
No hay máximos o mínimos globales

---

(5). Dado que $f(x) = x^2 - 1$

$$\Rightarrow \quad f(b) - f(a) = (b^2 - 1) - (a^2 - 1)$$
$$= b^2 - a^2.$$
$$= (b-a)(b+a)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(b-a)(b+a)}{b-a}$$
$$= b + a.$$



Así:
$$b + a = f'(c)$$

Pero $f'(x) = 2x$. Entonces
$$b + a = 2c.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{b+a}{2}}$$

~~Cuando~~ Como $b = 1$ y $a = 0$: $\left([a,b] = [0,1] \right.$

Tenemos que $c = \frac{1+0}{2} \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}}$

y es el único valor donde
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Gráficamente, ver los gráficos ⟶