UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

CÁLCULO DIFERENCIAL - TRIMESTRE: OTOÑO DE 2013.

EXAMEN # 3. - FECHA: **MARTES 12 DE NOVIEMBRE DE 2013.**

Nombre (20 puntos): Solución.

Instrucciones:

- Los primero **cuatros** problemas son **OBLIGATORIOS**. El problema (5) **ES OPCIONAL**, pero es muy sencillo.
- Cada problema tiene un valor de **20 puntos**. De esta forma no se penalizan de mayor forma los problemas más elaborados. Con sólo escribir su nombre, bien escrito, LEGIBLE, ya tienen 20 puntos.
- Tienen **una** hora con **quince (15)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus examenes a uno o varios de ustedes, o a todo el grupo. Gracias.
- **EXPLÍQUE SUS RESPUESTAS A DETALLE. Problema SIN explicar vale CERO (0) puntos.**

PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Calcule, si existe, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

(2) **(20 puntos.)** Usando la definición de derivada, calcule la función derivada de la siguiente función:

$$G(x) = \frac{1}{x},$$

para $x \neq 0$. Explique cada paso que efectúe, diciendo qué propiedades (de límites o de álgebra) está usando.

(3) **(20 puntos.)**

(a) Considere la función

$$h(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}, \quad \text{para} \quad x \geq 0, \quad x \neq 9.$$

Encuentre $h^{-1}(x)$.

(b) La función $F(x) = x^4$, $x \geq 0$, tiene como función inversa a $F^{-1}(x) = \sqrt[4]{x}$, $x \geq 0$. Usando la fórmula

$$\frac{dF^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{dF}{dy}\right|_{y=F^{-1}(x)}},$$

encuentre la derivada $\frac{dF^{-1}}{dx}$ de la función inversa F^{-1} y compare usando la fórmula de las potencias.

(4) **(20 puntos.)**

(a) Determine la derivada de

$$G(x) = \ln(\ln(\ln x)).$$

(b) Resuelva la ecuación (*i.e.*, encuentre x en la siguiente ecuación):

$$\text{Log}_2(x^2 + 7) = 4.$$

(5) **(20 puntos.)** (*Opcional*). Calcule el polinomio de Taylor de

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

alrededor de $a = 1$. (*Hint:* $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$)

Differential Calculus

EXAMEN #3 CÁLCULO DIFERENCIAL. Mo. Nov 12, 2013

UAM - AZCAPOTZALCO. OTOÑO 2013.

---

1. Evaluando directamente:

$$\frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \frac{1 - 1 - 0}{0 - 0} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad \text{Indeterminado}$$

Usar L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \text{"}\frac{1+1-2}{1-1}\text{"} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"}$$

Indeterminado

Usar L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{+\sin x} = \frac{1-1}{0} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} \quad \text{Indeterminado}$$

L'Hôpital

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1+1}{1} = 2$$

Entonces:

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = 2}$$

---

2. Usando la definición:

$$\frac{d}{dx} G(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{x - (x+h)}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{-h}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x}.$$

Entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = \frac{-1}{x^2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}}$$

$= (=$

3. (a) Tenemos:

$$y = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}, \quad \text{para } x \geq 0 \text{ y } x = 9.$$

Para encontrar $h^{-1}(x)$, tenemos que despejar y de la sig. ecuación

$$x = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{y}-1}$$

$$x(\sqrt{y}-1) = \sqrt{y}$$

$$x\sqrt{y} - \sqrt{y} - x = 0.$$

$$(x-1)\sqrt{y} = x.$$

$$\sqrt{y} = \frac{x}{x-1}$$

$$y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

$$\boxed{h^{-1}(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2}}$$

(b). Tenemos que $F(y) = y^4$. $\Rightarrow \frac{dF}{dy} = 4y^3$.

Como:

$$F^{-1}(x) = \sqrt[4]{x} = x^{1/4} \Rightarrow \frac{dF^{-1}}{dx} = \frac{1}{4y^3}\Big|_{y=F^{-1}(x)} = \frac{1}{4\cdot(x^{1/4})^3} = \frac{1}{4x^{3/4}}$$

i.e. $\boxed{\frac{dF^{-1}}{dx} = \frac{1}{4x^{3/4}}}$

Usando la regla de las potencias:

$$\frac{dF^{-1}}{dx} = \frac{d}{dx}x^{1/4} = \frac{1}{4}x^{-3/4} = \frac{1}{4x^{3/4}}$$

4(a). Usando la regla de la cadena:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx}\ln(\ln(\ln x)) = \frac{1}{\ln(\ln x)}\frac{d}{dx}\ln(\ln x)$$

cadena

$$= \frac{1}{\ln(\ln x)}\,\frac{1}{\ln x}\,\frac{d}{dx}\ln x.$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{dG}{dx} = \frac{1}{\ln(\ln x)}\,\frac{1}{\ln x}\,\frac{1}{x}}$$

4. (b) Usando la definición de logaritmo

$$\log_2 X = Y \iff X = 2^Y$$

Tenemos que:

$$\log_2(x^2+7) = 4 \iff x^2+7 = 2^4$$

$$\iff x^2+7 = 16$$

$$x^2 = 16-7 = 9$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \pm 3}$$

(5) Tenemos:

$f(x) = x^2 + x + 1$ $\qquad f(1) = 3$

$f'(x) = 2x + 1$ $\qquad f'(1) = 3$

$f''(x) = 2$ $\qquad f''(1) = 2$ ~~y el resto~~

~~El plinom~~ y el resto de las derivadas se anula.

Tenemos entonces:

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + 0 \cdots$$

$$\boxed{f(x) = 3 + 3(x-1) + (x-1)^2}$$