UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO - TRIMESTRE: OTOÑO DE 2013.

EXAMEN # 3. - FECHA: MARTES 12 DE NOVIEMBRE DE 2013.

**Nombre (20 puntos):** Solución.

**Instrucciones:**

- Son **CUATRO** problemas, a resolver CUATRO.
- Cada problema tiene un valor de **20 puntos**. De esta forma no se penalizan de mayor forma los problemas más elaborados. Con sólo escribir su nombre, bien escrito, LEGIBLE, ya tienen 20 puntos.
- Tienen **una** hora con **quince (15)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus examenes a uno o varios de ustedes, o a todo el grupo. Gracias.
- **EXPLÍQUE SUS RESPUESTAS A DETALLE. Problema SIN explicar vale CERO (0) puntos.**

---

## PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Usando la definición de derivada, calcule la función derivada de la siguiente función:

$$G(x) = \frac{1}{x},$$

para $x \neq 0$. ~~Explique cada paso que efectúe.~~ Muestre todos sus pasos

(2) **(20 puntos.)** Basándose con lo visto en clase, en los problemas de la tarea y sus conocimientos, diga cuál es la derivada de la siguiente función:

$$H(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{x},$$

(3) **(20 puntos.)** El objetivo del siguiente problema es aproximar el valor de $\sqrt{16.1}$. Lo haremos paso a paso para llegar a la solución.

(a) A primera vista, ¿cuál sería primer valor que aproxima $\sqrt{16.1}$?

(b) En base a su respuesta, ~~este número debe ser nuestro $x_0$. Entonces, en este caso~~,

$$x_0 = ? \qquad f(x) = ?$$

(c) Para la función $f(x)$ encontrada en el inciso (3b), encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

(d) Entonces, en este ejemplo, $x = 16.1$. Así pues, usando el resultado del inciso (3c), encuentre una mejor aproximación a $\sqrt{16.1}$ de la encontrada en (3a).

(4) **(20 puntos.)** Use la definición de *continuidad* para responder a las siguientes preguntas. (*Hint:* Grafique las funciones en el este problema).

(a) Considere la función

$$g(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x^3, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

¿Es esta función contínua en $x = \frac{1}{2}$? Explique.

(b) Considere la función

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0, \\ x^2, & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

¿Es esta función contínua en $x = 0$? Explique su respuesta.

Intro to Calc. Examen #3 Martes, Nov 12, 2013

UAM - Azcapotzalco

1. De la definición:

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{x} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{x-(x+h)}{(x+h)x} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-h}{(x+h)x} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h)\cancel{x}} = -\frac{1}{x^2}$$

Entonces, $\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}}$

2. En clase vimos que para monomios $x^\alpha$, se tiene que:

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Entonces:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{\cancel{3}}\right) + \frac{d}{dx}(x^{-1}) = \frac{3x^2}{3} + (-1)x^{-2}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}+\frac{1}{x}\right) = x^2 - x^{-2}}$$

$\boxed{3.}$ (a) A primer ~~calculo~~ cálculo:

$$\sqrt{16.1} \cong \sqrt{16} = 4.$$

(b) Entonces.

$$x_0 = 16, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

$$y \quad f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{16} = 4.$$

Tenemos el punto $(x_0, f(x_0)) = (16, 4)$

(c). Tenemos el punto $(x_0, f(x_0)) = (16, 4)$.

La ecuación de la recta tangente es:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Como. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{16}} =$

$$= \frac{1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{8}$$

Entonces.

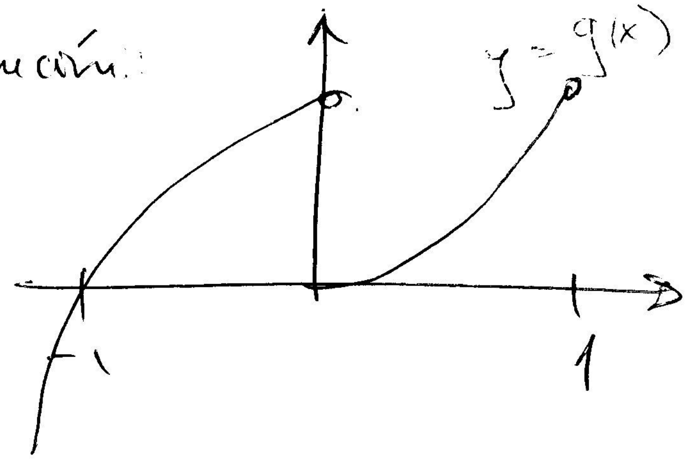
$$y = 4 + \frac{1}{8}(x - 16).$$

(d) Como $x = 16.1$ tenemos que:

$$\sqrt{16.1} \simeq 4 + \frac{1}{8}(16.1 - 16) = \boxed{4 + \frac{1}{80}}$$

$$= 2 =$$

4 (a) Graficando la función:




Pero piden continuidad en $x = \frac{1}{2}$:

(i) $g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$ existe.

(ii) $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \lim_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$ existe $= \frac{1}{8}$

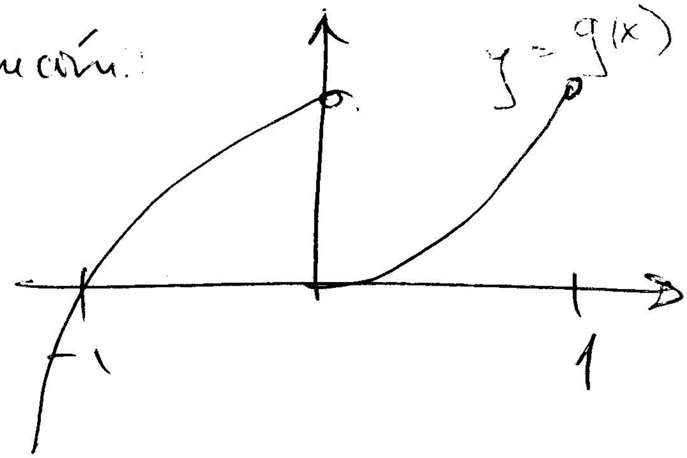
(iii) como $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{g(x) \text{ es continua en } x = \frac{1}{2}}$

---

(b)

4 (a) Graficando la función:




Pero piden continuidad en $x = \frac{1}{2}$:

(i) $g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ existe.

(ii) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^+} x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} g(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}^-} x^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$ existe $= \frac{1}{8}$

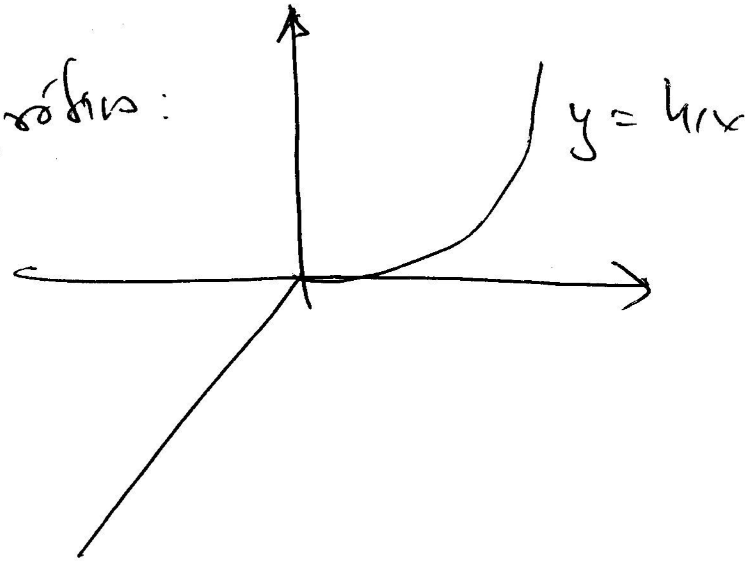
(iii) Como $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} = \lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} g(x)$

$\Rightarrow$ $\boxed{g(x) \text{ es continua en } x = \frac{1}{2}}$

(b)

(b).

Gráfico:




(i) $h(0) = 0$.

(ii) $$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} h(x) &= \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0. \\ \lim_{x\to 0^-} h(x) &= \lim_{x\to 0^-} x = 0. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} h(x) = 0 \text{ existe.}$$

(iii) Como
$$h(0) = 0 = \lim_{x\to 0} h(x)$$

$\Rightarrow$ $\boxed{h(x) \text{ es continua en } x=0}$