EXAMEN DE RECUPERACIÓN DE LA UEA CÁLCULO DIFERENCIAL

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

TRIMESTRE 13-O

MATUTINO

Nombre del Alumno: Soluciones

Matricula: ______________________ Calificación: ____________________

1. (1.25 ptos.) Obtener la ecuación de la recta normal para $x = 0$ de la función

$$y = \tan^{-1}(\cos(\left(2x + \sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2)).$$

2. (1.5 ptos.) Una escalera de 23 m de longitud está apoyada contra el muro de un edificio. La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre el muro a razón constante de 10 cm/min. ¿A qué razón se aleja del muro la parte inferior de la escalera en el instante en que la parte superior de la escalera está a 15 m por arriba del suelo?
3. (1.75 ptos.) Un contenedor que transporta ácido clorhídrico se fabrica de plástico pesado y se forma al unir dos semiesferas a los extremos de un cilindro circular recto. El volumen total del contenedor es de 1000 litros. El costo por metro cuadrado para los extremos es dos veces el costo por metro cuadrado del plástico usado en la parte cilíndrica. Encuentre las dimensiones del contenedor de modo que su costo de producción sea mínimo. [El volumen de una esfera es $\frac{4}{3}\pi r^3$ y su área superficial es $4\pi r^2$.]
4. (1.25 ptos.) Calcular aproximadamente $\sin 85°$, usando un polinomio de Taylor de grado cuatro.
5. (1.75 ptos.) Para la función $y = f(x)$, determinar la siguiente información,

$$y = \frac{e^x}{x^2}.$$

a) Dominio, ceros y paridad.
b) Intervalos de monotonía y puntos críticos.
c) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
d) Asíntotas.
e) Como consecuencia de la información precedente hacer un bosquejo gráfico de la función.

6. (1.25 ptos.) Demostrar que la función $y = f(x) = x \ln x$ tiene inversa en el intervalo $[1, \infty)$. Obtenga

$$(f^{-1})'(e).$$

Observe $f(e) = e$.

7. (1.25 ptos.) Calcular el siguiente límite usando la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} 2x - 2\sin^{-1} x}{x^3}$$

UAM - Azcapotzalco

Examen de Recuperación CÁLCULO DIFERENCIAL

Lunes 9 de diciembre de 2013

SOLUCIONES

1. (12.5 pts). Obtener la ecuación de la recta normal en $x=0$, de la función

$$f(x) = \text{Arctan}\left(\cos\left[\left(2x+\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2\right]\right).$$

Necesitamos calcular $\frac{df}{dx}(0)$, y la pendiente de la recta normal será $m = \dfrac{-1}{\frac{df}{dx}(0)}$. El punto por el que pasa la recta es:

$$y = f(0) = \text{Arctan}\left(\cos\left[\left(0+\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2\right]\right) =$$

$$= \text{Arctan}\left(\cos\left[\frac{\pi}{2}\right]\right) = \text{Arctan } 0$$

$$= 0$$

i.e. $P = (0,0)$

Entonces, por la regla de la cadena:

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\underbrace{\left(\cos\left[\left(2x+\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2\right]\right)^2 + 1}_{=1}} \cdot \left[-\sin\left(2x+\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right)^2\right] \cdot 2\left(2x+\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) \cdot 2$$

En $x=0$:

$$\frac{df}{dx}(0) = \frac{1}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2+1} \cdot \left[-\sin\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)^2\right] 2 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 2$$

$$= \frac{1}{0+1}\left(-\sin\frac{\pi}{2}\right) 4 \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -4\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Entonces: la pendiente de la recta normal es

$$m = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

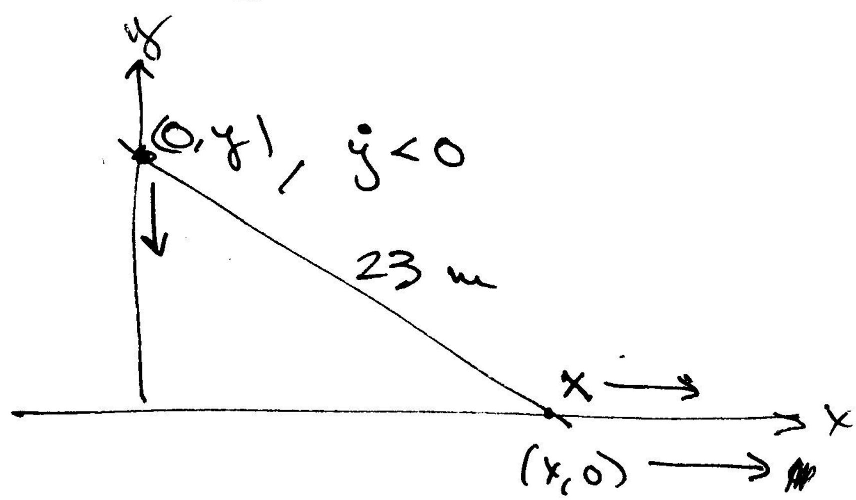
y la ec. de la recta normal es:

$$y - y_0 = m(x - x_0$$

$$y - 0 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(x-0)$$

$$\boxed{y = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}}x}$$

② (15 pts) Una escalera de 23 m de longitud está apoyada contra un muro de un edificio. La parte superior de la escalera se desliza hacia abajo sobre el muro a razón constante de 10 cm/min. ¿A qué razón se aleja del muro la parte inferior de la escalera, cuando la parte superior de la escalera está a 15 m del suelo?



$\dot x > 0.$

$\dot y = -10 \frac{cm}{min} = -\frac{1}{10}$ m/min, para tener todo en metros.

Relación entre x y y: Pitágoras:

$$x^2+y^2=23^2;$$

Entonces, calculando la derivada respecto al tiempo:

$$2x\dot x + 2y\dot y = 0 \Rightarrow x\dot x + y\dot y = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot y = -\frac{x}{y}\dot x.}$$

○ breve:

$$\boxed{\dot{x} = -\frac{y\,\dot{y}}{x}.}$$

Si $y = 15\ m \Rightarrow x = \sqrt{23^2 - y^2} = \sqrt{23^2 - 15^2}$

i.e. $x \doteq 17.43$ metros.

Entonces:

$$\dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y} = -\frac{15}{17.43}\left(-\frac{1}{10}\ m/min\right) =$$

$$\boxed{\dot{x} = \frac{15}{174.3}\ m/min}$$

i.e. $\dot{x} = 0.0860\ m/min$

$$\boxed{\dot{x} = 8.6\ cm/min}$$

3. (17.5 pts)

$V = 1000$ litros $= V_0$ es el volum del contenedor

$$1\ lt = 1\ dm^3 = 1 \cdot \left(\frac{1}{10} m\right)^3 = \frac{1}{1000} m^3:$$

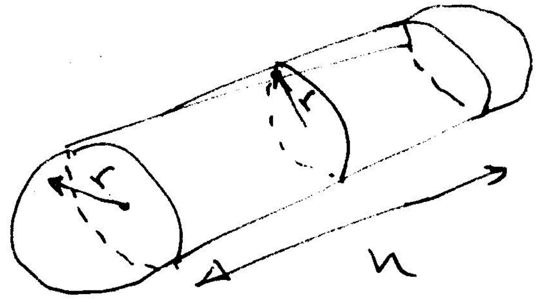
$$\Rightarrow \quad V = 1000 \cdot \frac{1}{1000} m^3 = 1 m^3$$

$$\boxed{V_0 = 1 m^3}$$

* Sea C_0 el costo por metro cuadrado en la parte cilíndrica.
* Entonces $2C_0$ es el costo en la parte esférica
* Así $C_1(r) = C_0 2\pi r \cdot h$ es el costo de la parte cilíndrica (con h - la altura del cilindro
* Y $C_2(r) = (2C_0) 4\pi r^2$ es el costo de la parte cilíndrica
* Entonces: $C(r) = 2\pi C_0 r \cdot h + 8\pi C_0 r^2$,

es el costo total. del tanque.

* Falta encontrar h, la altura del cilindro, en términos de r, el radio del mismo.



$$\text{Volume} = \frac{4\pi}{3} r^3 + \pi r^2 h = V_0 = 1\ m^3;$$

$$\Rightarrow \quad \pi r^2 h = V_0 - \frac{4\pi}{3} r^3$$

$$\boxed{h = \frac{V_0}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r.}$$

Entonces, el costo total es:

$$C(r) = 2\pi C_0 r \cdot h + 8\pi C_0 r^2$$

$$= 2\pi C_0 r \left(\frac{V_0}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r \right) + 8\pi C_0 r^2$$

$$= \frac{2 C_0 V_0}{r} - \frac{8\pi}{3} C_0 r^2 + 8\pi C_0 r^2$$

$$= \frac{2 C_0 V}{r} + \frac{16}{3}\pi C_0 r^2$$

Si $r \to 0^+ \Rightarrow C(r) \longrightarrow \infty$

Si $r \longrightarrow +\infty \Rightarrow C(r) \longrightarrow \infty$

Como $C(r)$ es continua, entonces alcanza su mínimo en $(0, \infty)$.

Como $C'(r) = -\frac{2C_0V_0}{r^2} + \frac{32}{3}\pi C_0 r$, es continua, entonces: su mínimo lo alcanza donde $C'(r)=0$, i.e.

$$-\frac{2C_0V_0}{r_0^2} + \frac{32}{3}\pi C_0 r_0 = 0.$$

donde tenemos que encontrar r_0. Como $C_0 \neq 0$:

$$-\frac{2V_0}{r_0^2} + \frac{32}{3}\pi r_0 = 0.$$

(vemos entonces que es independiente del costo por m^2 en la parte cilíndrica).

Así

$$-\frac{V_0}{r^2} + \frac{16}{3}\pi r_0 = 0$$

$$-V_0 + \frac{16}{3}\pi r_0^3 = 0$$

$$\frac{16}{3}\pi r_0^3 = V_0$$

$$r_0^3 = \frac{3}{16\pi} V_0$$

$$\Rightarrow \boxed{r_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{16\pi} V_0}}$$ Como $V_0 = 1m^3$:

$$\boxed{r_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{16\pi}}\ m}$$ $$\boxed{r_0 = 0.39\ m} \approx 0.4m$$

$$= ? = \boxed{h = \frac{1}{\pi(0.39)^2} - \frac{4}{3}(0.39)}$$

$$h = \frac{V_0\, m^3}{\pi (0.4)^2 m^2} - \frac{4}{3}(0.4)\, m$$

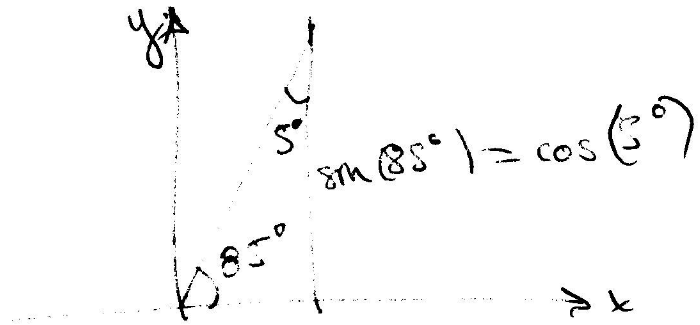
$$= \frac{1\, m}{(0.16)\pi} - \frac{1.6}{3}\, m.$$

$$\boxed{h = 1.456\ m}$$

---

(1) 12.5 pts

Sabemos que $\sin 85^\circ = \cos =$.



Entonces, para $x \sim 0$ (por ejemplo $5^\circ = \frac{2\pi}{360} \cdot 5$ rad

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^6).$$

$$x = \frac{2\pi}{360} \cdot 5 \text{ rad} = \frac{10\pi}{360} \text{ rad} \cong \frac{\pi}{36} \text{ rad} \cong 0.0826 \text{ rad}.$$

$$\Rightarrow \cancel{\cos 2\pi} \quad \cos 5^\circ = \cos\left(\frac{10\pi}{360}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{36}\right).$$

$$\cong 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{36}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{36}\right)^4$$

$$\cong 0.6424.$$

⑤ (17.5 pts)

$$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$$

(a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Ceros: $f(x) \neq 0$ siempre

$f(x)$ no es par o impar, por ser e^x ni par o impar

(b) Monotonía. Calcular $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{x^2 e^x - e^x 2x}{x^4} = \frac{x e^x (x-2)}{x^4}$$

$$= \frac{e^x (x-2)}{x^3} = \frac{e^x}{x^2} - 2\frac{e^x}{x^3}$$

$f' > 0$ si $x > 2$ $\Rightarrow$ Creciente

$f' < 0$ si $0 < x < 2$ $\Rightarrow$ Decreciente

$f' > 0$, si $x < 0$ $\Rightarrow$ Creciente

Pts. críticos: $\begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$

(c) Concavidad

$$f'(x) = \frac{e^x}{x^2} - 2\frac{e^x}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = \left(\frac{e^x}{x^2}\right)' - \left(\frac{2e^x}{x^3}\right)'$$

$$= \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3}\right) - \left(\frac{2e^x}{x^3}\right)'$$

$$= \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3}\right) - \frac{x^3 2e^x - 2e^x 3x^2}{x^6}$$

$$= \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3}\right) - \frac{2x^2e^x(x-3)}{x^6}$$

$$= \left(\frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3}\right) - \frac{2e^x}{x^4}(x-3)$$

$$= \frac{e^x}{x^2} - \frac{2e^x}{x^3} - \frac{2e^x}{x^3} + \frac{6e^x}{x^4}$$

$$= \frac{e^x}{x^2} - \frac{4e^x}{x^3} + \frac{6e^x}{x^4}$$

i.e.

$$f''(x) = \frac{e^x}{x^2}\left(1 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}\right). = \frac{e^x}{x^4}\left(x^2 - 4x + 6\right)$$

Como: $\frac{e^x}{x^4} \neq 0$ (si $x \neq 0$), entonces el signo de $f''(x)$

lo determina $g(x) \equiv x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 - 4 + 6 > 0$

Ahora: $g(x) = (x \quad)(x \quad)$

$$\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{16 - 4 \cdot 6} = \sqrt{16 - 24} \Rightarrow \sqrt{-8} = i\sqrt{8}.$$

$\Rightarrow g(x)$ nunca es cero; $g(x) > 0$ $\Rightarrow$ $f''(x) > 0$

$= 11 =$

$\Rightarrow$ no hay puntos de inflexión

(d) Asíntotas. Como $x \longrightarrow 0^{\pm}$ implica

que $f(x) \longrightarrow \infty$,

entonces $x = 0$ es una asíntota vertical

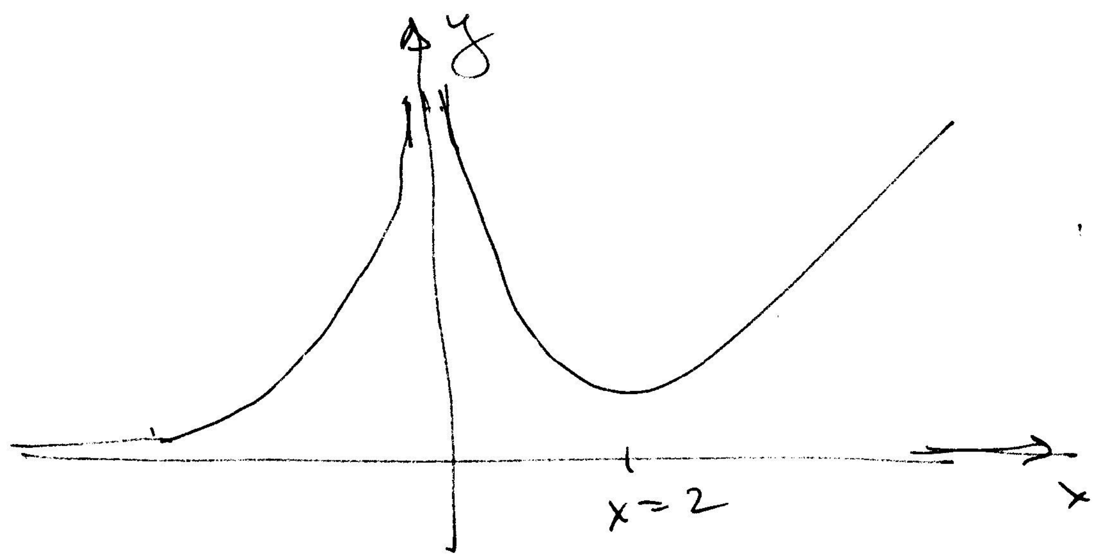
Ahora

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = \frac{0}{\infty} = 0 \quad y = 0 \text{ es asíntota horizontal}$$

Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$,

entonces no hay asíntota si $x \to +\infty$.

(e)



(6) 12.5 pts: $f(x) = x \operatorname{Log}(x)$

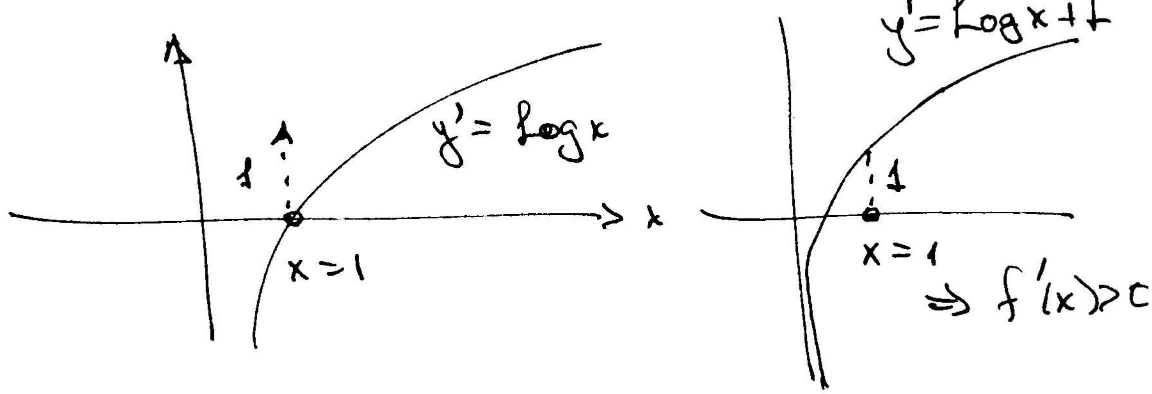
Para demostrar que tiene inversa, necesitamos

$$f'(x) \neq 0 \quad \text{en} \quad [1, \infty).$$

En efecto:

$$f'(x) = 1 \cdot \operatorname{Log} x + x \cdot \frac{1}{x}$$

i.e. $$f'(x) = \operatorname{Log} x + 1$$



$$y' = \operatorname{Log} x + 1 > 0 \quad \text{si} \quad \underline{x > 1}:$$

O bien: $\operatorname{Log} x > 0$, si $x > 1$.

$\operatorname{Log} x + 1 > 1 > 0$, si $x > 1$:

incluso $\operatorname{Log} x + 1 \geq 1 > 0$

$\leftarrow$ si $x \geq 1$.

$y = f(x)$
$\Rightarrow x = f^{-1}(y)$ $\Rightarrow$ $f'(x) > 0$ entonces es invertible.

$$\Rightarrow \frac{df^{-1}}{dy} = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=f^{-1}(y)}} = = \frac{1}{\operatorname{Log} x + 1} \qquad \left.\frac{df^{-1}}{dy}\right|_{y=e} = \left.\frac{1}{\operatorname{Log} x + 1}\right|_{x = f^{-1}(e) = e} = \frac{1}{1+1} =$$

If $y = e = x \operatorname{Log} x$.

Ahora Sea $y = f^{-1}(x)$. Entonces:

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}} = \frac{1}{\operatorname{Log} y + 1} =$$

$$x = f(y)$$

$$\cancel{= \frac{1}{\operatorname{Log}}}$$

$$x = f(y) = f(f^{-1}(x))$$

$$1 = \frac{df}{df^{-1}} \frac{df^{-1}}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{df^{-1}}{dx} \Rightarrow \boxed{\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dy}\right|_{y=f^{-1}(x)}}}$$

$f(e) = e$:

$\Rightarrow \quad x = e \Rightarrow y = e$

Así $$\frac{df^{-1}}{dx}(e) = \frac{1}{\operatorname{Log} y + 1} = \frac{1}{\operatorname{Log} e + 1} = \frac{1}{2} \checkmark$$

7. $\boxed{12.5 \text{ pts}}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin 2x - 2\arcsin x}{x^3} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”} \text{ Indetermined.}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-(2x)^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}$$

Indetermined:

$$= \cancel{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-2}{1-(2x)^2}}{6x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\frac{2(-2(2x)\cdot 2)}{(1-(2x)^2)^{3/2}} - \frac{-1}{2}\frac{-2x}{(1-x^2)^{3/2}}}{6x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{+4x}{(1-(2x)^2)^{3/2}} - \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}}{6x}$$

$$= \cancel{\lim_{x\to 0} -\frac{3}{2}\frac{4x}{(1-(2x)^2)}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{6}\left(\frac{4}{(1-(2x)^2)^{3/2}} - \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \cancel{\lim} \frac{1}{6}(4-1) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$