UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
AZCAPOTZALCO

CÁLCULO DIFERENCIAL
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2013.

EXAMEN # 1.
FECHA: JUEVES 19 DE SEPTIEMBRE DE 2013.

Nombre: SOLUCIÓN.

Instrucciones:

- Son **cinco** problemas, a resolver cinco.
- Tienen **una** hora con **veinticinco (25)** minutos para resolverlos.
- Cada problema tiene un valor de **20 puntos**. De esta forma no se penalizan de mayor forma los problemas más elaborados.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Eviten la pena de quitarles sus examenes a uno o varios de ustedes, o a todo el grupo. Gracias.
- **EXPLÍQUEN SUS RESPUESTAS A DETALLE.** Es decir, ¡muéstren que han aprendido! Esto para recibir el puntaje total de cada problema. **Problema no explicado será dejado sin puntos.**

PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Usando la definición de derivada, calcule la función derivada de la siguiente función para $x = 1$:

$$f(x) = x^4.$$

Explique cada paso que efectúe, diciendo qué propiedades (de límites o de álgebra) está usando.

(2) **(20 puntos.)** Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de siguiente la función en $x = 1$.

$$f(x) = \operatorname{Log} x.$$

(Recuerde que $\operatorname{Log} x$ quiere decir $\operatorname{Log}_e x = \ln x$, y es el exponente de x, cuando x es escrito en forma exponencial. Es decir:

$$x = e^y \qquad \text{es equivalente a escribir} \qquad \operatorname{Log} x = y).$$

(*Hint:* Recuerde que: $e^0 = 1$).

(3) **(20 puntos.)** Calcule la derivada de la función:

$$f(x) = x \sin(\sqrt{1 + x^2}).$$

(4) **(20 puntos.)** Calcule la segunda derivada de y (como función de x), si y está dada en forma implícita por

$$x^5 + y^5 = 5.$$

(5) **(20 puntos)**. Una partícula se mueve a lo largo del eje x, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$x(t) = t^3 - 12t^2 + 36t,$$

donde la posición x está en metros y t en segundos.

(a) Encuentre la velocidad $v(t)$ para el movimiento de esta partícula.

(b) Encuentre la aceleración $a(t)$ para el movimiento de esta partícula.

(c) ¿ Cuándo la partícula se acelera? ¿Cuándo frena?

(d) ¿ Cuándo la partícula se mueve hacia adelante? ¿Cuándo hacia atrás?

CÁLCULO DIFERENCIAL

Trimestre: Otoño 2013. Examen: Martes 24 de Septiembre de 2013

EXAMEN #1.

(1) Con $f(x) = x^4$, usar la def'n de derivada.

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1^4}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 \cdot 1 + x \cdot 1^2 + 1^3)}{x-1}$$

$$= \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1^3) = 1^3 + 1^2 + 1 + 1^3$$

$$= 4$$

O bien, con $x = 1$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[(x + \Delta x) - x]\left[(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^2 x + (x+\Delta x) x^2 + x^3\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left[(x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^2 x + (x+\Delta x) x^2 + x^3\right]}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left((x+\Delta x)^3 + (x+\Delta x)^2 x + (x+\Delta x) x^2 + x^3\right)$$

$$= x^3 + x^2 \cdot x + x \cdot x^2 + x^3$$

$\boxed{f'(x) = 4x^3}$ Como $x = 1$: $\boxed{f'(1) = 4}$

$= 1 =$

(2) La pendiente de la recta tangente $(x_0, f(x_0))$ está dada por:

$$f'(x_0) = \frac{d}{dx} \log x \Big|_{x=x_0} = \frac{1}{x_0}.$$

Así pues: la ecuación de la recta tangente.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

resulta ser:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

i.e.

$$y - \log x_0 = \frac{1}{x_0}(x - x_0)$$

Si $x_0 = 1$: $\begin{cases} \dfrac{1}{x_0} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ \log x_0 = \log 1 = 0. \end{cases}$

Entonces $y - 0 = 1(x - 1)$

$$\Rightarrow \boxed{y = x - 1}$$

③ Calcule la derivada de $f(x) = x \operatorname{sen}(\sqrt{1+x^2})$

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x \operatorname{sen}(\sqrt{1+x^2})\right).$$

$$= \left(\frac{d}{dx} x\right) \operatorname{sen}(\sqrt{1+x^2}) + x \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sen}\left((1+x^2)^{1/2}\right)\right)$$ Regla del producto

$$= 1 \cdot \operatorname{sen}(\sqrt{1+x^2}) + x \cos\left[(1+x^2)^{1/2}\right] \frac{d}{dx}\left((1+x^2)^{1/2}\right)$$

por la regla de la cadena y derivada de $\operatorname{sen}(u)$: $\frac{d \operatorname{sen} u}{du} = \cos u$

$$= \operatorname{sen}(\sqrt{1+x^2}) + x \cos(\sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} \frac{d(1+x^2)}{dx}$$

regla de la cadena

y $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$, $(\alpha = \frac{1}{2})$

$$= \operatorname{sen}(\sqrt{1+x^2}) + x \cos(\sqrt{1+x^2}) \frac{(2x)}{2(1+x^2)^{1/2}}$$

regla de $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$ (aquí: $\alpha = 2$)

Entonces:

$$\boxed{\frac{df}{dx} = \operatorname{sen}(\sqrt{1+x^2}) + \frac{x^2 \cos(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}}$$

④ Calcule la 2ª derivada de "y", como función de x, si

$$x^5 + y^5 = 5.$$

Por la regla de la cadena:

$$5 \quad \frac{d}{dx}\left(x^5 + (y(x))^5\right) = \frac{d}{dx} 5$$

$$5x^4 + 5(y(x))^4\, y'(x) = 0.$$

$$\Rightarrow \quad x^4 + y^4 y' = 0 \Rightarrow \boxed{y' = -\frac{x^4}{y^4}}$$

Para la segunda derivada, usamos la regla del cociente:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{y^4 (x^4)' - x^4 (y^4)'}{(y^4)^2}\right)$$

$$= -\left(\frac{y^4\, 4x^3 - x^4\, 4y^3 y'}{y^8}\right) \quad \text{por la regla de la cadena}$$

$$= -\left(\frac{4x^3}{y^4} - \frac{4x^4}{y^5} y'\right)$$

$$= -\left(\frac{4x^3}{y^4} - \frac{4x^4}{y^5}\left(-\frac{x^4}{y^4}\right)\right), \text{ pues } y' = -\frac{x^4}{y^4}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{4x^3}{y^4} + \frac{4x^8}{y^9}\right)} = -\left(\frac{4x^3y^5 + 4x^8}{y^9}\right)$$

$$= -4x^3\left(\frac{y^5 + x^5}{y^9}\right)$$

③ La trayectoria de la partícula está dada por

$$x(t) = t^3 - 12t^2 + 36t, \quad \forall \text{ tiempo}, t.$$

(a) Su velocidad es la derivada de x con respecto de t:

$$v(t) = \frac{d}{dt}x = 3t^2 - 24t + 36.$$

(b) La aceleración es la derivada de $v(t)$

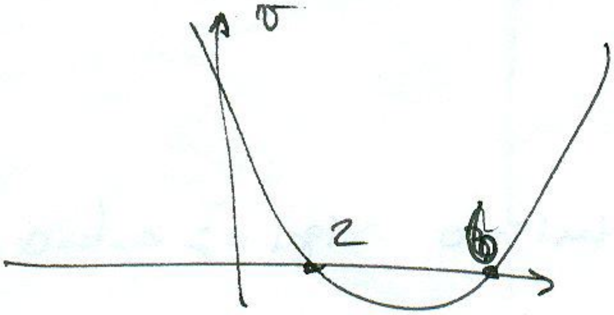
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = 6t - 24.$$

(d) ¿Cuándo la partícula se mueve hacia adelante? ¿Atrás?

Notemos que:

$$v(t) = 3(t^2 - 8t + 12)$$
$$= 3(t-6)(t-2)$$

$v(t)$ es una parábola con ceros en $t=2$ y $t=6$



$\therefore$ la velocidad es positiva si:

$$t \in (-\infty, 2] \cup [6, \infty)$$

y por tanto se mueve hacia adelante

La velocidad es negativa si

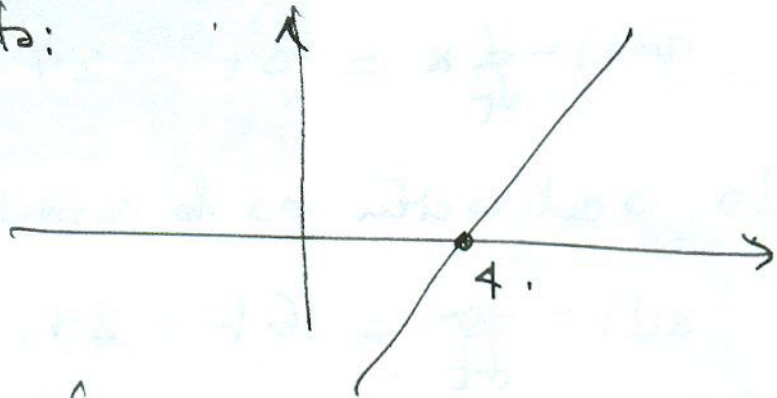
$$t \in (2, 6)$$

(c) La aceleración es:

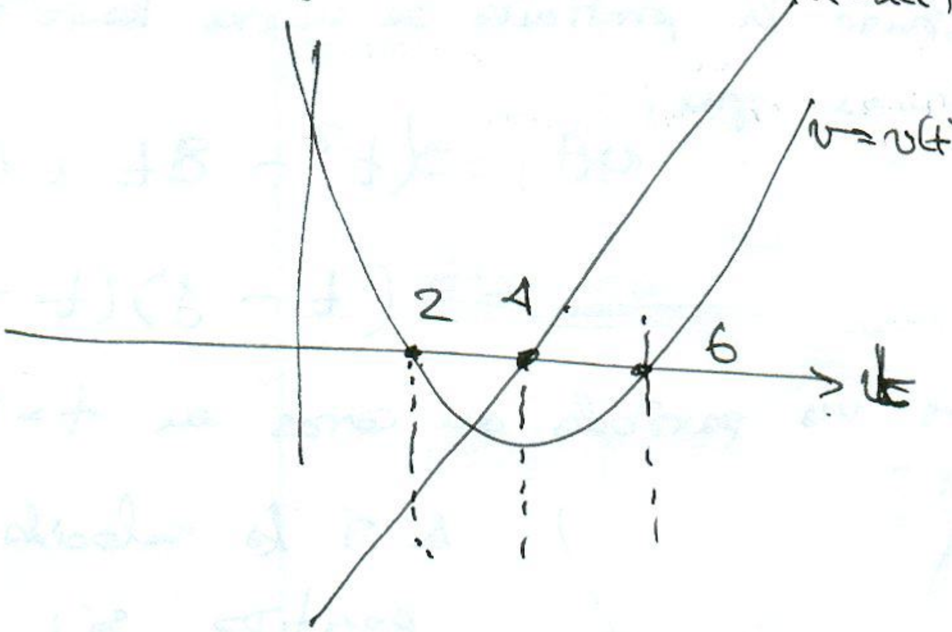
$$a(t) = 6t - 24$$

$$= 6(t-4)$$

y es una recta:



Juntemos los gráficos:



Si v y a tienen el mismo signo; entonces la partícula acelera:

$$t \in [2, 4] \cup [6, \infty)$$

$$\begin{matrix} v<0 & & v>0 \\ a<0 & & a>0 \end{matrix}$$

Y frena, si a y v tienen signo opuesto: $t \in (-\infty, 2] \cup [4, 6]$

$$\begin{matrix} v>0 & & v<0 \\ a<0 & & a>0 \end{matrix}$$