05092620 13

# Examen #1.

## Introducción al Cálculo. Jueves 26 de septiembre de 2013.

(1). Tenemos que $\tan x = 1$, con $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\Rightarrow$ $\frac{\sin x}{\cos x} = 1$ $\Rightarrow$ $\sin x = \cos x$

Ahora, usando el teorema de Pitágoras.

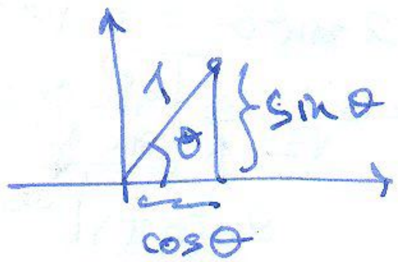
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Como $\sin x = \cos x$:

$$2\sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Para escoger el signo, recordemos que $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$




$\Rightarrow$ $\sin\theta > 0$, $\cos\theta > 0$ Escojemos el signo "+".

$$\boxed{\sin x = +\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Como $\cos x = \sin x$ $\boxed{\cos x = +\frac{1}{\sqrt{2}}}$

---

(2) Tenemos que:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right.$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

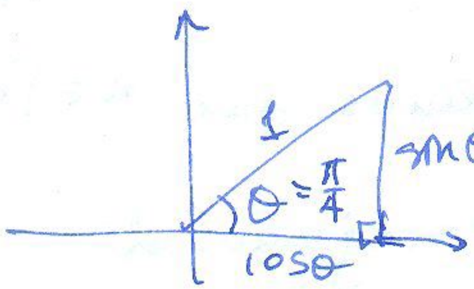
Como $\cos x$ es par y $\sin x$ es impar:

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

~~Aqui necesitamos tabla de puntos~~

Ahora: $\frac{\pi}{4}$ corresponde a $45°$.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$



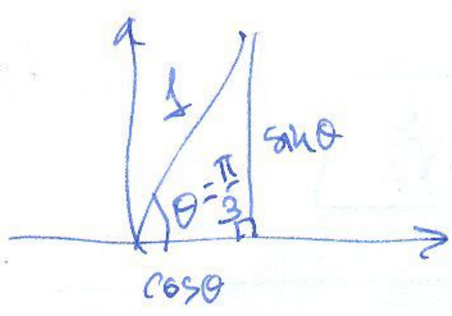

Triángulo isósceles: $\sin\theta = \cos\theta > 0$

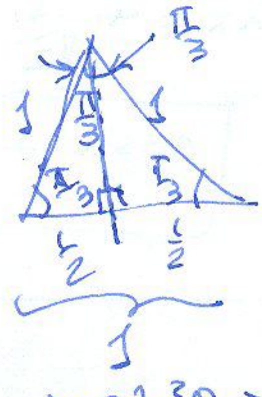
Pitágoras: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$2\sin^2\theta = 1$ $\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}}$

$\Rightarrow \sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{\sin\theta = +\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\sin\frac{\pi}{4}$

$\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\boxed{\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$




Triangulo Equilátero: $\theta = \frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2}$ $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

Pitágoras $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = 1$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

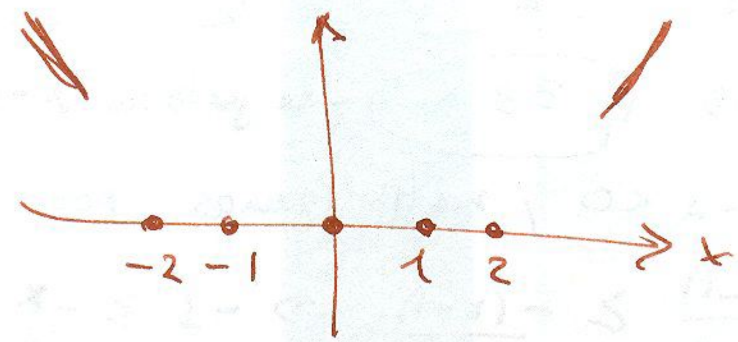
$\Rightarrow$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3} = $ pues $\theta = \frac{\pi}{3} \in (0, \frac{\pi}{2})$. Entonces:

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

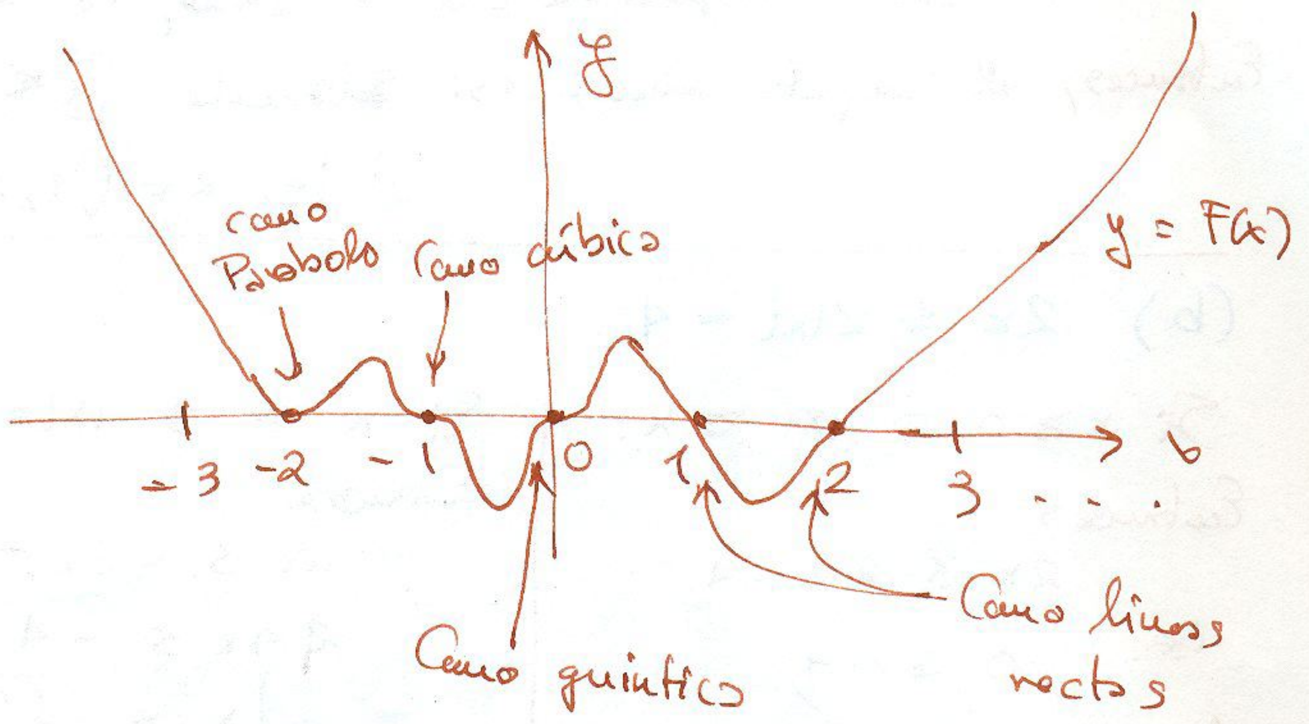
③ Grafique el siguiente polinomio.

$$F(x) = (x+2)^2 (x+1)^3 x^5 (x-1)(x-2)$$

Es un polinomio de grado 12, entonces es par, y en $x = +\infty$ y $x = -\infty$ se comporta:




y tiene ceros en $x = -2, -1, 0, 1, 2$. Se comporta como parábola, cúbico, quíntico, lineal y lineal. Así:



③ Resuelva las desigualdades

(a) $\dfrac{1}{x-1} \geq \dfrac{1}{2}$.

Si $x-1>0$, multiplicamos ambos miembros de la desigualdad por $x-1$:

$$\underbrace{\frac{x-1}{x-1} \geq \frac{(x-1)}{2}} \Rightarrow \underbrace{1 \geq \frac{x}{2}-\frac{1}{2}} \Rightarrow \underbrace{1+\frac{1}{2} \geq \frac{x}{2}}$$

$\Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2} \geq \frac{x}{2}} \Rightarrow 3 \geq x$.. que junto con $x-1>0 \Rightarrow \boxed{1<x\leq 3}$

O bien, Si $x-1<0$, multiplicamos por $-(x-1)>0$:

$$\underbrace{\frac{-(x-1)}{\cancel{x}-1} \geq \frac{-(x-1)}{2}} \Rightarrow \underbrace{-1 \geq -\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{x}{2} \geq 1+\frac{1}{2}} \Rightarrow \underbrace{\frac{x}{2} \geq \frac{3}{2}} \Rightarrow x \geq 3,$$ pero

esto no es compatible con $x-1<0$, ie $x<1$.

Entonces, el conjunto solución es: solamente $\boxed{1 < x \leq 3}$

ie. $x \in (1,3]$

---

(b) $2x \leq 2|x| - 4$

Si $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$:

Entonces

$2x \leq 2x-4$

ie. $0 \leq -4$,

lo cual es falso.

Si $x<0 \Rightarrow |x| = -x$:

Entonces

$2x \leq -2x-4$

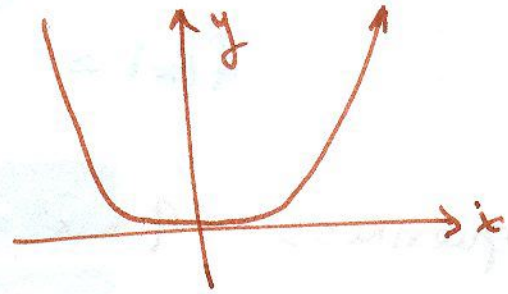
$4x \leq -4$

$\boxed{x \leq -1}$

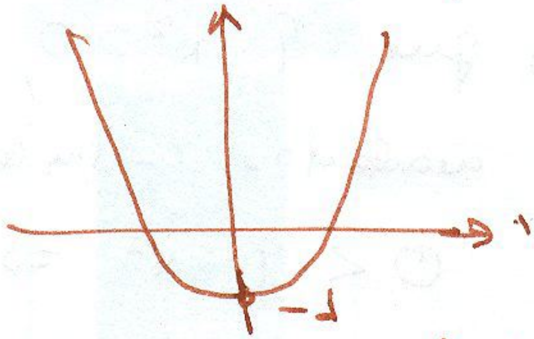
$x \in (-\infty, -1]$

5 Grafique las siguientes funciones:

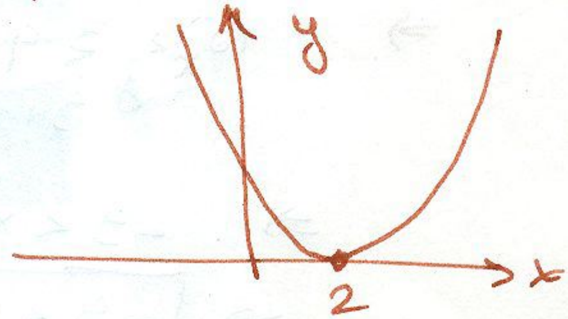
(a) $y = x^4$:



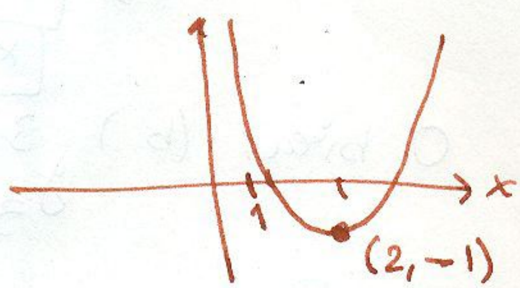

(b) $y = x^4 - 1$



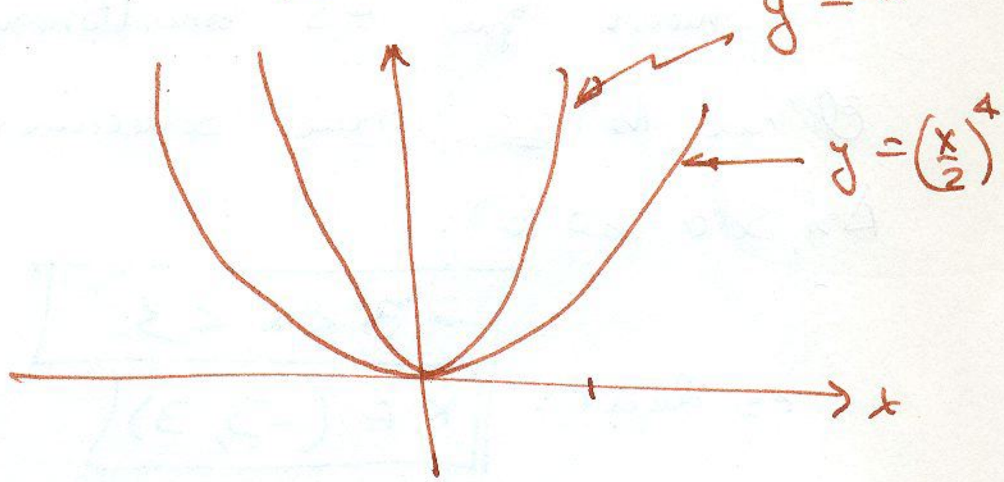

(c) $y = (x-2)^4$




(d) $y = (x-2)^4 - 1$




(e) $y = x^4$ ; $y = \left(\frac{x}{2}\right)^4$:



⑥ Encuentre dominio y rango de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

Requerimos $9 - x^2 \neq 0$, por estar en el denominador

y que $9 - x^2 \geq 0$, por estar dentro

de la raíz cuadrada. Entonces.

$$0 < 9 - x^2 \Rightarrow 0 < (3-x)(3+x)$$

$$\Rightarrow \quad (a) \left.\begin{array}{l} 3 - x > 0 \\ y\ 3 + x > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 3 > x \\ y\ x > -3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad -3 < x \quad y \quad x < 3$$

$$\Rightarrow \boxed{-3 < x < 3}$$

$$\boxed{x \in (-3, 3)}$$

O bien: $(b) \left.\begin{array}{l} 3 - x < 0 \\ y\ 3 + x < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3 < x \\ y\ x < -3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 < x$

Pero x ~~no~~ puede ser mayor que 3, y menos que −3 simultáneamente.

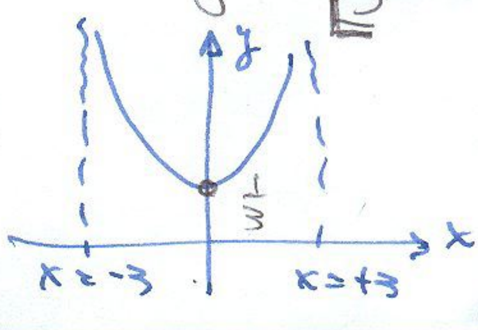
El caso (b) no tiene solución. Así

Así, solo caso (a):

$$\boxed{-3 < x < 3}$$

es decir: $\boxed{x \in (-3, 3)}$

Rango $= \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$



(7) Encuentre el periodo de $f(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)$.

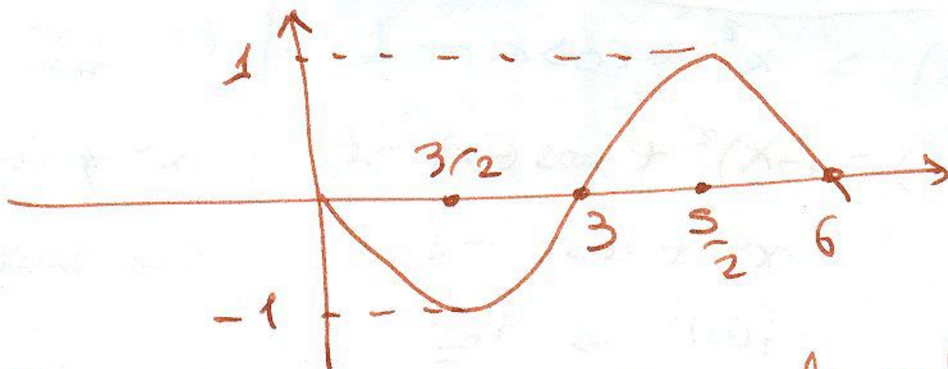
y grafíquela:

Como $\sin(y)$ tiene periodo $2\pi$, entonces el periodo $P$ de $f$ es tal que:

$$f(P) = -\sin(2\pi)$$

i.e. $$-\sin\left(\frac{\pi P}{3}\right) = -\sin 2\pi$$

i.e. $$\frac{\pi P}{3} = 2\pi \Rightarrow \boxed{P = 6}$$




y el signo negativo la refleja en el eje x.

8

(a) $f(x) = x^2 + \cos x - x$.

Como $f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) - (-x)$

$= x^2 + \cos x + x \neq f(x)$

entonces no es par ni impar

No Es par ni impar

Pues $x^2$ y $\cos x$ son pares, pero $x$ es impar

(b) $f(x) = x^3 + \sin x - x$

$f(-x) = (-x)^3 + \sin(-x) - (-x)$

$= -x^3 - \sin(+x) - (-x)$

$= -(x^3 + \sin x - x) = -f($

$= -f(x) \Rightarrow$ Impar

Es Impar, pues $x^3$, $\sin x$, $x$ son impares

(c) $f(x) = x^2 + \cos x - 1$.

$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) - 1$

$= x^2 + \cos x - 1$

$= f(x) \Rightarrow$ Par

Es par, porque $x^2$, $\cos x$, $1$, son funciones pares