Introducción al Cálculo, Turno Matutino, 13-O

Los ejercicios del global están marcados con un asterisco (*). Todos los ejercicios deben mostrar el procedimiento.

Nombre: SOLUTION SET Matrícula:

Parte I

1. Resolver las desigualdades

$$i)\ \left|\frac{2x+4}{6}\right| < 4 \qquad *\,10\%\ ii)\ \frac{3}{x+2} \leq -4$$

2. * 10% Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + x^2 & \text{si } -2 \leq x \leq 1 \\ -3 + \sqrt{x-1} & \text{si } 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Calcular para la función f

- Dominio y ceros.
- Bosquejo gráfico y rango (o imagen).
- Obtener la gráfica de $h(x) = 1 - f(x)$.

3. * 15% Sean las funciones $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$ y $h(x) = \sqrt{x+4}$. Determinar el dominio y la fórmula de las funciones

$$a)\ f+g \qquad b)\ \frac{f}{g} \qquad c)\ g \circ h$$

4. Un tanque horizontal está formado de un cilindro que en cada uno de sus extremos tiene semiesferas con radio igual al del cilindro. Si el largo del cilindro es el quintuple del radio, determinar el volumen del tanque en términos del radio de las semiesferas.

Parte II

1. * 10% Obtener la gráfica de la función $f(x) = 3\cos(x+\pi)$ para $x \in [-\pi, \pi]$ a partir de las siguientes gráficas.

- Graficar la función $g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \cos x$.
- Graficar la función $h(x) = g(x+\pi)$.
- Graficar la función $f(x) = 3h(x)$.

Determinar los ceros e intervalos de monotonía de la función f.

2. Calcular los siguientes límites

$$*5\%\ i)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen} 3x}{6x} + 7x - 1\right) \qquad *5\%\ ii)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+x}{\sqrt{x+4}-2} \qquad iii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{3x^6-7x^3+2x}{x^8-2x}$$

3. *15% Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-3}$. Calcular para la función f

   - Dominio y ceros.
   - Ecuaciones de las asíntotas verticales y horizontales.
   - Bosquejo gráfico y rango (o imagen).

4. Dibujar una posible gráfica de una función

$$f : (-\infty, 0) \cup (0,3) \cup (3,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

que cumpla las siguientes condiciones: tiene raices en los puntos -1 y $-\frac{1}{2}$. Además

$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = 1 \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = -1 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4 \qquad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$$

Parte III

1. * 15% Sea la función f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1} & \text{si } x \in (-\infty,-1) \\ ax^2+b-3a-4 & \text{si } x \in [-1,0) \\ \dfrac{3\operatorname{sen} x}{2x}+2 & \text{si } x \in (0,\infty) \end{cases}$$

   - Justificar por qué la función f es continua en cada uno de los intervalos $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ y $(0,\infty)$.
   - Determinar los valores de a y b para que la función f sea continua en $x=-1$ y $x=0$.

2. Justificar por qué la ecuación $3x-6+\cos 7x = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[\frac{\pi}{2},\pi]$.

3. La posición $s(t)$ de una partícula a cada tiempo t está descrita por la fórmula $s(t) = t^2+t+\frac{3}{4}$. Determinar aplicando la definición de derivada su velocidad instantánea a cada tiempo t_0.

4. * 15% Sea $g(x) = \sqrt{25-x^2}$.

   - Calcular por definición la derivada de g en el punto $x=3$.
   - Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de g en el punto $(3, g(3))$.

Lunes, Noviembre 18, 2013

Introducción al Cálculo (Matutino)

Examen Global (Matutino) Trimestre Otoño 2013

---

(1).(i) La desigualdad $\left|\frac{2x+4}{6}\right| < 4$ significa:

$$-4 < \frac{2x+4}{6} < 4$$

$$\Rightarrow \quad -24 < 2x+4 < 24$$

$$-28 < 2x < 20$$

$$\boxed{-14 < x < 10}$$

(ii) $\boxed{\frac{3}{x+2} \le -4.}$

Caso (a) $x+2 > 0$

$$\Rightarrow \quad 3 \le -4(x+2)$$

$$3 \le -4x - 8$$

$$+4x \le -11$$

$$\Rightarrow \quad x \le -\frac{11}{4}$$

Junto con $x > -2 \Rightarrow$ $\boxed{\cancel{-2 < x \le -\frac{11}{4}}}$ Pero esta desigualdad es falsa pues $-2 \not< -\frac{11}{4}$

Caso (b) $x+2 < 0. \quad \Rightarrow \quad -(x+2) > 0$

$$4 \le \frac{+3}{-(x+2)}$$

$$-4(x+2) \le 3$$

$$-4x - 8 \le 3$$

$$-8-3 \le 4x$$

$$-\frac{11}{4} \le x$$

junto con $x < -2$:

$$\boxed{-\frac{11}{4} \le x < -2}$$

Es el conjunto solución.

(1)

2. $f(x) = \begin{cases} 2x + x^2, & -2 \leq x \leq 1 \\ -3 + \sqrt{x-1}, & 1 < x \leq 4. \end{cases}$

(a) ~~(i)~~ Dominio como $\sqrt{x-1}$ está definida para $x \geq 1$, i.e. $1 \leq x$, y está dentro de la definición de $f(x)$, entonces está bien.

$$\mathrm{Dom}(f) = [-2, 4]$$

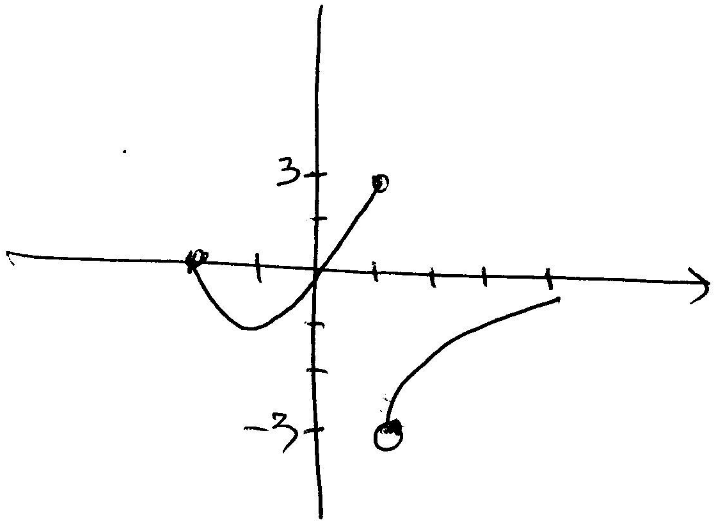
(ii) $2x + x^2 = 0 \Rightarrow (2+x)x = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x = 0 \\ x = -2 \end{pmatrix}$

$$-3 + \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 3$$

$$x - 1 = 9$$

$\boxed{x = 10.}$ pero $10 \notin \mathrm{Dom}(f)$

Los ceros son $x = -2, 0, \cancel{10}$.

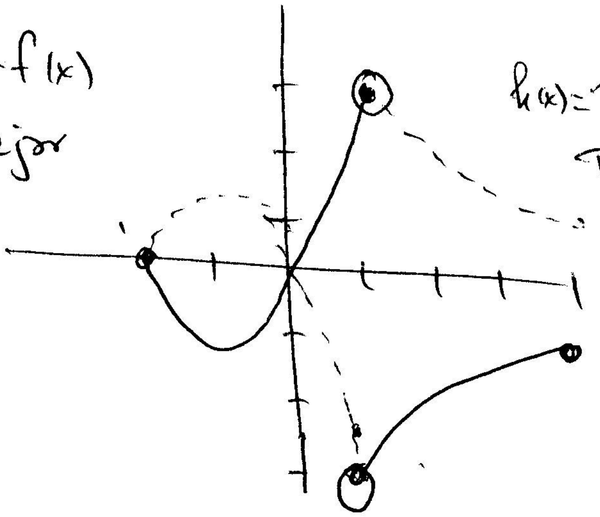


Rango $= (-3, 3]$

$= 2$

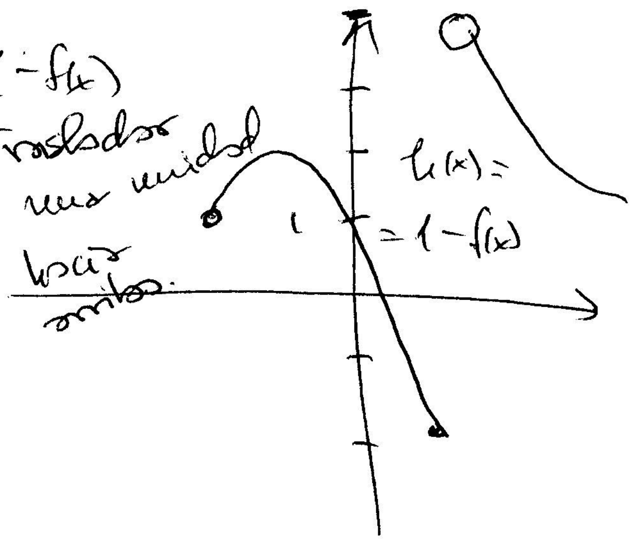
(ii) $-f(x)$

Reflejar



$h(x)=1-f(x)$

Traslado una unidad hacia arriba.



---

(3). Sean $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+2}$, $g(x) = \dfrac{x-4}{x^2-4}$, $h(x) = \sqrt{x+4}$

(a)

$$(f+g)(x) = \frac{x^2-16}{x+2} + \frac{x-4}{(x-2)(x+2)}$$

$$\mathrm{Dom}(f+g) = \mathbb{R} \; \{-2,+2\}$$

(b)

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2-16}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x-4} = \frac{\cancel{(x-4)}(x+4)}{\cancel{(x+2)}} \cdot \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-4)}}$$

$$\mathrm{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} / \{-2, 4\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{f}{g}(x) = (x+4)(x-2)}$$

(c)

$$(g \circ h)(x) = \frac{h(x) - 4}{h^2(x) - 4}.$$

Como $h(x)$ debe estar definida: $x+4 \geq 0$. $x \geq -4$

=3=

Entonces

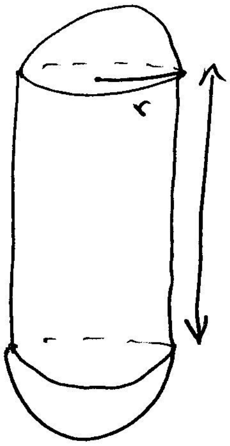
$$(g \circ h)(x) = \frac{\sqrt{x+4}-4}{(x+4)-4} = \frac{\sqrt{x+4}-4}{x}.$$

Entonces $x \neq 0$:

$$\mathrm{Dom}(g \circ h) = \mathbb{R} / \{0\} \cup (-\infty, -4)$$

o bien. $[-4,0) \cup (0,\infty)$.

4.



$h = 5r$.

Vol. cilindro $= \pi r^2 \cdot h$

$= 5\pi r^3$

Vol. esfera $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\boxed{\text{Volumen del tanque} := 5\pi r^3 + \frac{4}{3}\pi r^3}$$

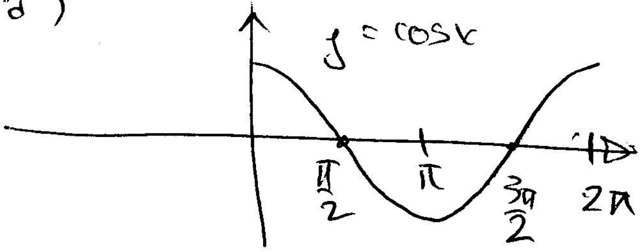
o bien

$$V = \frac{15+4}{3}\pi r^3$$

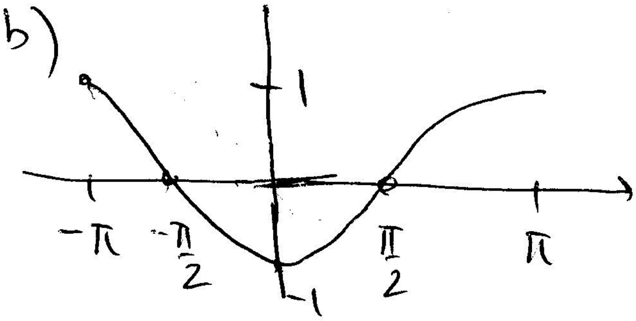
$$\boxed{V = \frac{19}{3}\pi r^3.}$$

PARTE II

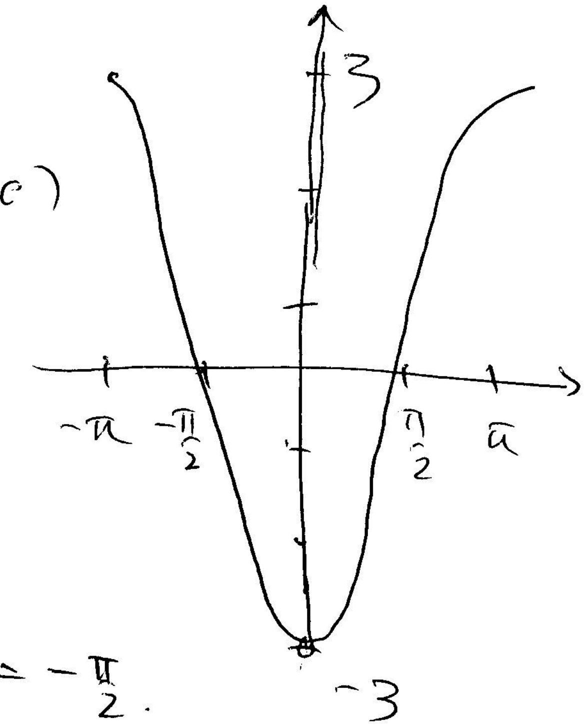
1. (a)



(b)



(c)



$$f(x) = 3\cos(x+\pi) = 0$$

Si $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = -\frac{\pi}{2}$.

$f(x)$ es decreciente en $[-\pi, 0]$

y creciente en $[0, \pi]$

2. Calculos los límites;

(a). $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{6x} + 7x - 1\right) = -\frac{1}{2}$, porque

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{6x} + \lim_{x\to 0}(7x-1) = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x} + (-1)$$

$$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} - 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 - 1 = -\frac{1}{2}$$

$y = 3x$

(ii) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{x+4} - 2} = \lim_{x \to 2}$ "$\dfrac{0}{0}$" Indeterminado:

$$\frac{x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{(x+4)} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{(x^3 - 2x^2 + x)(\sqrt{x+4} + 2)}{(x+4) - 4}$$

$$= \frac{(x^3 - 2x^2 + x)(\sqrt{x+4} + 2)}{x}$$

$$= \frac{x(x^2 - 2x + 1)(\sqrt{x+4} + 2)}{x}$$

$$= (x^2 - 2x + 1)(\sqrt{x+4} + 2) \xrightarrow[x \to 0]{}$$

$$\xrightarrow[x \to 0]{} (0 - 0 + 1)(\sqrt{4} + 2) = 1 \cdot$$
$$= 1(2+2)$$

Entonces $\boxed{\lim_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{\sqrt{x+4} - 2} = 4}$

(iii) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{3x^6 - 7x^3 + 2x}{x^8 - 2x} = \lim_{x \to \infty} \dfrac{x^6 \left(3 - \frac{7}{x^3} + \frac{2}{x^5}\right)}{x^8 \left(1 - 2/x^7\right)}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} \lim_{x \to \infty} \frac{3 - 7/x^3 + 2/x^5}{(1 - 2/x^7)}$$

$$= 0 \cdot \frac{3}{1} \boxed{= 0}$$

3.(a) $f(x)=\frac{x^2+3x}{x^2+2x-3} = \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+3)}$

$\boxed{Dom(f) = \mathbb{R}/\{1,-3\}.}$

Si $x \neq -3 \Rightarrow f(x) = \frac{x}{x-1}.$

$f(x) = \frac{0}{-3} = 0.$

$f(x) = 0. \Rightarrow \frac{x(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0;$

Si $x=-3$, f no está definida.

Si $x=0 \Rightarrow f(0)=0$ $\boxed{x=0}$ Única raíz.

(b) Como $\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x}{x-1} = \frac{3}{4}$,

entonces la única asíntota vertical es $\boxed{x=1}$.

Asíntotas horizontales.

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$

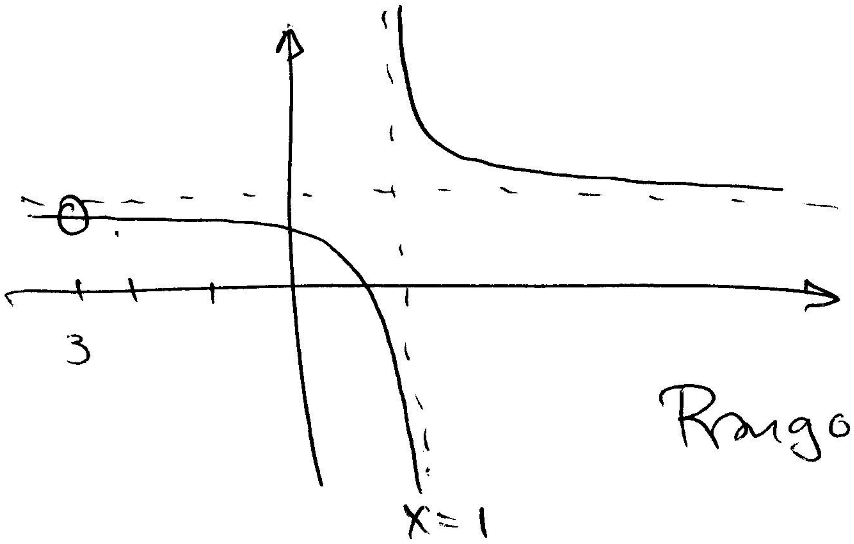
$= 1$

De igual modo $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1$

Solo tiene una asíntota horizontal $\boxed{y=1}$

(c) $\lim_{x \to +1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = +\infty$

pues: $x-1>0$, y $x>0$



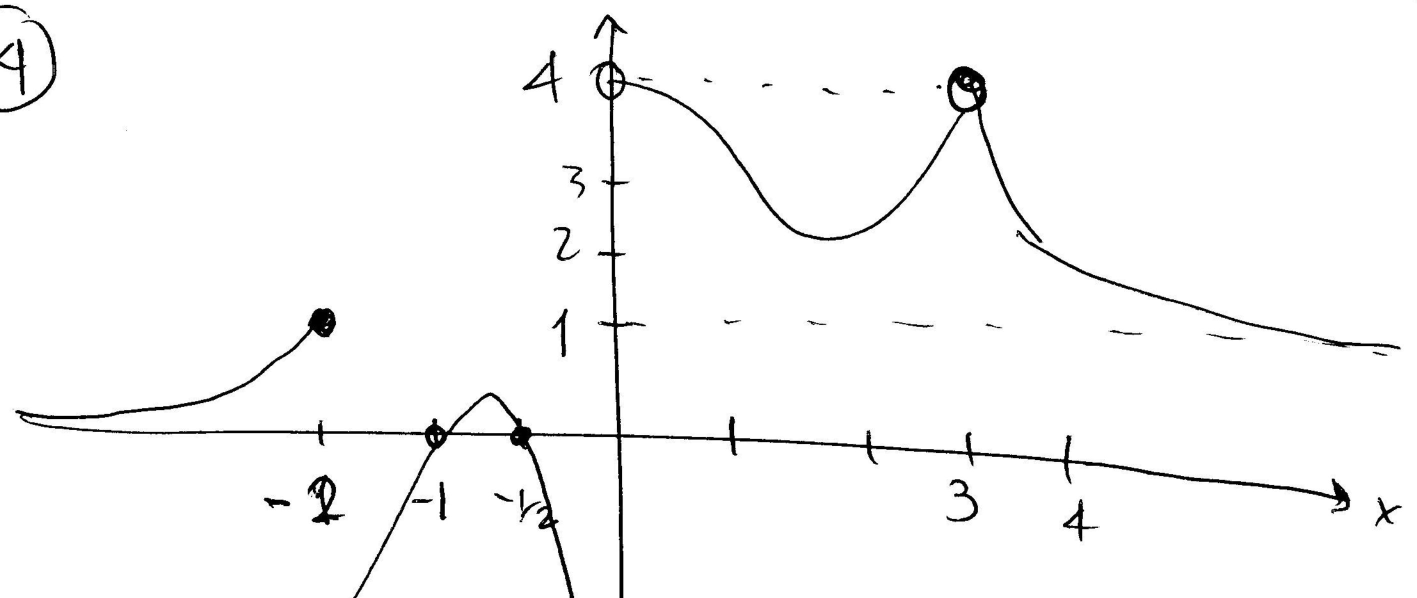
$\text{Rang}(f) = \mathbb{R} / \{1, \frac{3}{4}\}$

pues $y=1$ es asíntota horizontal

y $\lim_{x \to -3} f(x) = \frac{3}{4}$

---

(4)



PARTE III

1.(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x^2+1}, & x \in (-\infty,-1) \\ ax^2+b-3a-4, & x \in [-1,0) \\ \dfrac{3\sin x}{2x}, & x, \in (0,\infty) \end{cases}$

En $(-\infty,-1)$, $\dfrac{x}{x^2+1}$ es una función racional con $x^2+1 \neq 0$, siempre $\Rightarrow$ continua

En $[-1,0)$, $f(x)$ es un polinomio, y los polinomios son continuos

En $(0,\infty)$, 2 es constante y $\frac{3}{2}\frac{\sin 3x}{2x}$ es válida pues $x \neq 0$.

(b) $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{-1}{1+1} = -\dfrac{1}{2}$.

$y\ f(-1) = a+b-3a-4 = -2a+b-4$

$\Rightarrow \quad -2a+b-4 = -\frac{1}{2}$, por continuidad.

Por otra parte,

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = b-3a-4$

y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3}{2}\dfrac{\sin x}{x} + 2 = \dfrac{3}{2}+2 = \dfrac{7}{2}$

$\Rightarrow b-3a-4 = \frac{7}{2}$, para satisfacer continuidad.

Tenemos que resolver el sistema:

$$-2a+b-4=-\frac{1}{2} \quad \dots\dots \text{I}$$

$$b-3a-4=\frac{7}{2} \quad \dots\dots \text{II}$$

Substrayendo I − II :

$$-2a+\cancel{b}-\cancel{4}-\cancel{b}+3a+\cancel{4}=-\frac{1}{2}-\frac{7}{2}.$$

$$-2a+3a=-\frac{8}{2}$$

$$\boxed{a=-4}$$

Substituir en I :

$$-2(-4)+b-4=-\frac{1}{2}$$

$$8+b-4=-\frac{1}{2}$$

$$b+4=-\frac{1}{2}$$

$$b=-\frac{1}{2}-4 \Rightarrow \boxed{b=-\frac{9}{2}}$$

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x^2+1}, & x\in(-\infty,-1) \\ -4x^2+\frac{7}{2}, & x\in[-1,0) \\ \frac{3}{2}\frac{\sin x}{x}+2, & x\in(0,\infty) \end{cases}}$$

$f(x)=ax^2$

Pues, en $[-1,0)$, $f(x)=ax^2+b-3a-4=$

$$=-4x^2-\frac{9}{2}-3(-4)-4=-4x^2-\frac{9}{2}+12-4=-4x^2-\frac{9}{2}+8$$

$$=10= \qquad =-4x^2+\frac{7}{2}.$$

2. $f(x) = 3x - 6 + \cos 7x$ es una función continua en $[\frac{\pi}{2}, \pi]$

Ahora $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3\pi}{2} - 6 + \cos\frac{7\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} - 6 < 0.$

y $f(\pi) = 3\pi - 6 + \cos(7\pi) = 3\pi - 6 - 1$

$= 3\pi - 7 > 0.$

Por el Teorema de Valor intermedio, $\exists\, c \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, tal que: $f(c) = 0.$

Dicho c es solución de $f(x) = 0$

---

3. $\frac{ds}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(t_0+h)^2 + (\cancel{t_0}+h) + \cancel{3/4} - (t_0^2 + \cancel{t_0} + \cancel{3/4})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{t_0^2} + 2ht_0 + h^2 + h - \cancel{t_0^2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(2t_0 + h + 1)\cancel{h}}{\cancel{h}} = 2t_0 + 1$$

4. $g(x) = \sqrt{25 - x^2}$

(a) $$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{\sqrt{25-(x+h)^2} - \sqrt{25-x^2}}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{25-(x+h)^2} - \sqrt{25+x^2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{25-(x+h)^2} + \sqrt{25+x^2}}{\sqrt{25-(x+h)^2} + \sqrt{25+x^2}}$$

$$= \frac{(25-(x+h)^2) - (25+x^2)}{h\left(\sqrt{25-(x+h)^2} + \sqrt{25+x^2}\right)}$$

$$= \cancel{25} - \cancel{x^2} - 2xh - h^2 \cancel{-25} - \cancel{x^2}$$

$$= \frac{(-2x-h)\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{25-(x+h)^2} + \sqrt{25+x^2}\right)}$$

Entonces

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-2x-h}{\sqrt{25-(x+h)^2} + \sqrt{25+x^2}}$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}} \quad \text{ó} \quad \boxed{g'(x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}}$$

(b) $g(3) = \sqrt{25-9} = 4 \Rightarrow$ $y = m(x - x_0) + y_0$

$\cancel{y} = g'(3) = \frac{-3}{\sqrt{16}} = \frac{-3}{4}$ $\boxed{y = -\frac{3}{4}(x-3) + 4}$

$=12=$