UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
EXAMEN GLOBAL DE **CÁLCULO DIFERENCIAL**
19/11/ 2013. 10:00 a 13:00 horas.

Nombre: ______________________________ Matrícula: ________________

*El examen global consta de los ejercicios que se encuentran marcados con el símbolo *. Todas las respuestas deben tener su desarrollo.*

PRIMERA PARTE

1. * (15 puntos) Derivar las siguientes funciones:

   a) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{\sqrt{2x}}$.

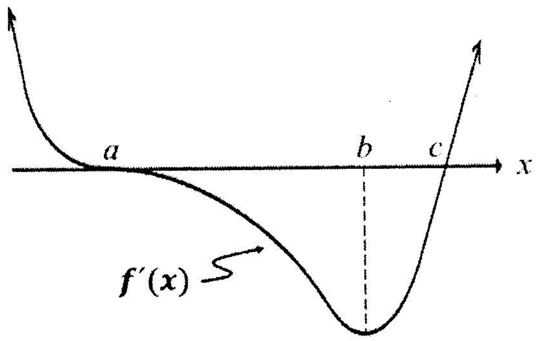
   b) $h(\theta) = \sqrt{\theta}\, cos^3(3\theta) - \dfrac{tan^2(\theta)}{\theta}$.

2. * (15 puntos) Obtener la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $\frac{3y}{2x} + \cos(5y) = 1$ en el punto P $(1, 0)$.

3. * (10 puntos) Un bloque cúbico de hielo se funde de tal forma que su arista disminuye con regularidad 2 mm por hora. ¿Cuál es la razón con la que disminuye su volumen cuando la arista mide 25 cm?

SEGUNDA PARTE

1. Considerando el bosquejo de la gráfica de $f'(x)$, que se muestra a continuación, determinar para la función $f(x)$:
   a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.
   b) Puntos críticos y su clasificación.
   c) Puntos de inflexión.
   d) Intervalos de concavidad.



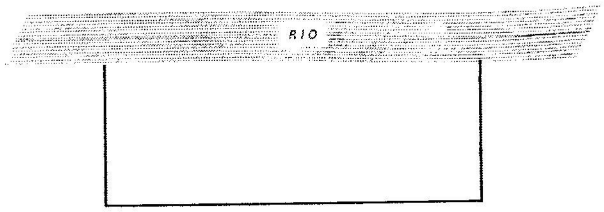
2. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2+4}$, determinar:
   a) Intervalos de monotonía
   b) Puntos críticos y su clasificación.
   c) Intervalos de concavidad.
   d) Puntos de inflexión.

   e)

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

   f) Bosquejo de la gráfica

3. * (15 puntos) Un granjero tiene 2400 m de malla para cercar un campo rectangular que limita con un río como se muestra en la figura (no necesita cercar a lo largo del río). ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo que permiten el área más grande?



TERCERA PARTE

1. Derivar la función

   $$h(x) = \sqrt{\arctan(1+e^{-x})} + ln^3(7x^2 + x).$$

2. Derivar la función

   $$h(x) = (sen\, x)^{e^x}.$$

3. * (25 puntos) Dada la función $f(x) = (1-x)e^{-x}$, determinar:

   a) Dominio, raíces y asíntotas
   b) Intervalos donde crece y donde decrece.
   c) Puntos críticos y su clasificación.
   d) Intervalos de concavidad.
   e) Puntos de inflexión.
   f)

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) \quad y \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

   g) Bosquejo de la gráfica.

4. * (10 puntos) Para la función $h(x) = e^x + e^{-x}$, determinar algún intervalo en donde la función tenga inversa. Notando que $h(1) = \frac{e^2+1}{e}$, calcular $(h^{-1})'\left(\frac{e^2+1}{e}\right)$.

5. * (10 puntos) Calcular el valor aproximado de cos 92°, utilizando un polinomio de Taylor de grado 5.

CALCULO DIFERENCIAL | Martes 19 noviembre 2013

Examen Global UAM-Azcapotzalco.

PARTE I.

1. Derivar las siguientes funciones.

(a) $f(x) = \dfrac{(x^2-1)^2}{\sqrt{2x}}$

$$\frac{df}{dx} = \frac{\sqrt{2x}\,((x^2-1)^2)' - (x^2-1)^2(\sqrt{2x})'}{(\sqrt{2x})^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2x}\;2(x^2-1)\,2x - (x^2-1)^2\frac{2}{2\sqrt{2x}}}{2x}$$

$$= \frac{\sqrt{2x}\;4(x^2-1)x - (x^2-1)^2\frac{1}{\sqrt{2x}}}{2x}$$

$$= \frac{2x\,(4(x^2-1)x) - (x^2-1)^2}{\sqrt{2x}\;2x}$$

$$= (x^2-1)\,\frac{8x^2-(x^2-1)}{(2x)^{3/2}}$$

$$\boxed{\frac{df}{dx} = (x^2-1)\,\frac{(7x^2+1)}{(2x)^{3/2}}}$$

(b) $h'(\theta) = \dfrac{d}{d\theta}\left(\sqrt{\theta}\cos^3(3\theta) - \dfrac{\tan^2\theta}{\theta}\right) =$

$$= \frac{\cos^3(3\theta)}{2\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\,3\cos^2(3\theta)(-\sin(3\theta))\,3 - \frac{\theta(\tan^2\theta)' - (\tan^2\theta)\theta'}{\theta^2}$$

$$= \frac{\cos^3(3\theta)}{2\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}(-9)\sin 3\theta\cos^2 3\theta - \frac{\theta\,2\tan\theta(1+\tan^2\theta) - \tan^2\theta}{\theta^2}$$

$= 1 =$

$$= \frac{\cos^3(3\theta)}{2\sqrt{\theta}} - 9\sqrt{\theta}\sin 3\theta \cos^2 3\theta - \frac{\tan\theta}{\theta}\left(2\theta + 2\theta\tan^2\theta - \tan\theta\right)$$

y y°

2. Obtener la pendiente y la ecuación de la recta tangente a la curva $3y + 2x\cos 5y = 2x$ en $P=(1,0)$.

Veamos que P pertenece a la curva.

$$3\cdot 0 + 2\cdot 1\cos(5\cdot 0) = 0 + 2\cdot 1 = 2$$

y $2x = 2\cdot 1 = 2$ ✓

$\frac{3y}{2x} + \cos 5y = 1$

$\frac{2x\cdot 3y' - 3y\cdot 2}{4x^2} - 5\sin 5y\, y' =$

$y'\left(\frac{6x}{4x^2} - 5\sin 5y\right)$

$= \frac{6y}{4x^2}$

Ahora, usando diferenciación implícita:

$$3y' + 2(x\cos 5y)' = (2x)'$$

$$3\frac{dy}{dx} + 2\cos 5y + 2x(-\sin 5y)\cdot 5y' = 2.$$

$$\left(3 - 2x\sin 5y\cdot 5\right)\frac{dy}{dx} = 2 - 2\cos 5y;$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2(1-\cos 5y)}{3 - 10x\sin 5y}}$$

Evaluando en $P=(1,0)$, obtenemos la pendiente de la recta tangente:

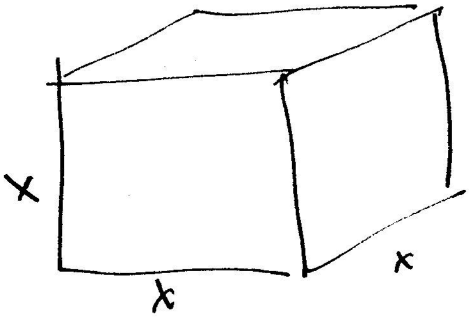
$$m = \frac{dy}{dx}(1,0) = \frac{2(1 - 5\cos 0)}{3 - \cancel{10}\cdot 1\sin 0} = \frac{\cancel{0}}{3}$$

~~m=0~~ y la ecuación de la recta tangente es.

$\boxed{m = -\frac{8}{3}}$ $y = -\frac{8}{3}(x-1)$ $\boxed{\cancel{y = 3(x-1)+0}}$ $\boxed{\cancel{y=0}}$

$= 2 =$

3.



$V = \text{Volumen} = x^3$

Sabemos que $\frac{dx}{dt} = 2$ mm/hr.

y $x = x(t)$ es función del tiempo

~~Entonces~~ $\cancel{\frac{dV}{dt}}$. Entonces el volumen

$$V(t) = (x(t))^3$$

también es función del tiempo: Así.

$$\frac{dV}{dt} = 3\,x^2(t)\,\frac{dx}{dt}$$

Cuando: $x = 25$ cm; y como $\frac{dx}{dt} = \frac{2}{10}$ cm/hr.

Entonces:

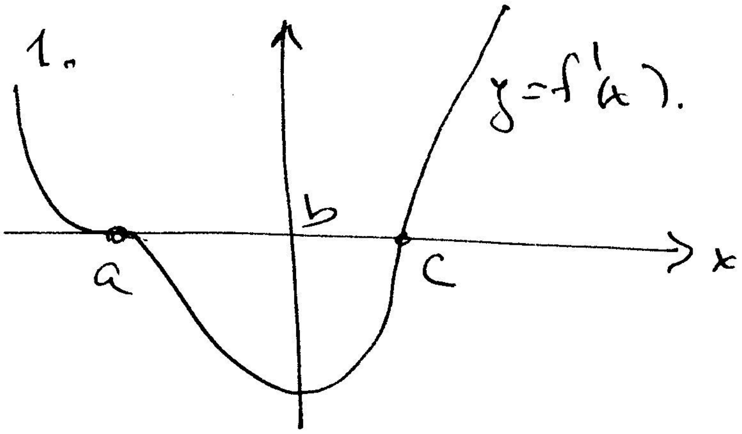
$$\frac{dV}{dt} = 3\,(25)^2\cdot\frac{2}{10} = 3\cdot\left(\frac{100}{4}\right)^2\frac{2}{10}$$

$$= 3\cdot\frac{10^4}{16}\,\frac{2}{10} = 3\cdot\frac{10^3}{8}$$

$$= \frac{3}{8}(1000) = \boxed{375 \text{ cm}^3/\text{hr.}}$$

PARTE II

1.



(a) $f \nearrow$, si $f'>0$.

i.e si $x<a$

y $x>c$

$f \searrow$, si $f'<0$

i.e. si $a<x<c$.

(b). f' siempre existe; entonces los únicos puntos críticos son donde $f'=0$.

i.e. $\boxed{x=a}$ y $\boxed{x=c}$, son los únicos puntos críticos.

$\boxed{x=a}$ Si $x<a \Rightarrow f'>0 \Rightarrow f \nearrow$

si $x>a \Rightarrow f'<0 \Rightarrow f \searrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{x=a}$ máximo local

$\boxed{x=c}$ Si $x<c \Rightarrow f'<0 \Rightarrow f \searrow$

Si $x>c \Rightarrow f'>0 \Rightarrow f \nearrow$

$\Rightarrow$ $\boxed{x=c}$ mínimo local.

(c) los puntos de inflexión son aquellos puntos donde $f''(x)=0$ i.e. $\frac{d}{dx} f'=0$.

Aquí $\boxed{x=a}$ y $\boxed{x=b}$

(d) La función es cóncava hacia arriba si

$f'' > 0$, i.e. si $f' \nearrow$, i.e. en el intervalo

$x > b$ i.e. (b, ∞).

La función es cóncava hacia abajo, si

$f'' < 0$, i.e. si $f' \searrow$, i.e. en el intervalo

$x < b$, i.e $(-\infty, b)$

Por tanto, en el punto $x = a$, donde no hay cambio de concavidad, no hay punto de inflexión (aún cuando $f''(a) = 0$).

2. $f = \dfrac{x^2}{x^2+4}$. $f = \dfrac{x^2+4-4}{x^2+4}$

$$\Rightarrow \quad f(x) = 1 - \frac{4}{x^2+4}.$$

$$f' = + \frac{4\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{8x}{(x^2+4)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{8x}{(x^2+4)^2}}$$

$$f''(x) = \frac{8}{(x^2+4)^2} - 2\cdot\frac{8x}{(x^2+4)^3}\cdot 2x = \frac{8(x^2+4) - 32x^2}{(x^2+4)^3}$$

$$\cancel{= -5x^2+32} \quad = \frac{-24x^2+32}{(x^2+4)^3}$$

$$\boxed{f''(x) = 8\left(\frac{-3x^2+4}{(x^2+4)^3}\right)}$$

(a) Intervalos de monotonía:

$f'(x) > 0$ si $x > 0$, y $f \nearrow$ creciente

$f'(x) < 0$ si $x < 0$, y $f \searrow$ decreciente

(b) $f' = 0$ solo en $x = 0$ y f' existe siempre

Entonces $x = 0$ es el único punto crítico

Por (a), $x = 0$. es <u>mínimo local</u>.

(c) Como $f''(x) = 8\left(\dfrac{-3x^2+4}{(x^2+4)^3}\right)$,

$f''(x) > 0$, si $-3x^2+4 > 0$

(pues $(x^2+4)^3 > 0$ siempre)

~~si~~ $\Rightarrow \dfrac{4}{3} > x^2 \Rightarrow |x| < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

Entonces f es <u>cóncava hacia arriba</u>

si $-\dfrac{2}{\sqrt{3}} < x < \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

y <u>cóncava hacia abajo</u> si $x > \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

ó $x < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

(d). Como hay cambios de concavidad en $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ y $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, éstos son puntos de inflexión.

(e) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \dfrac{4}{4+x^2} = 1.$

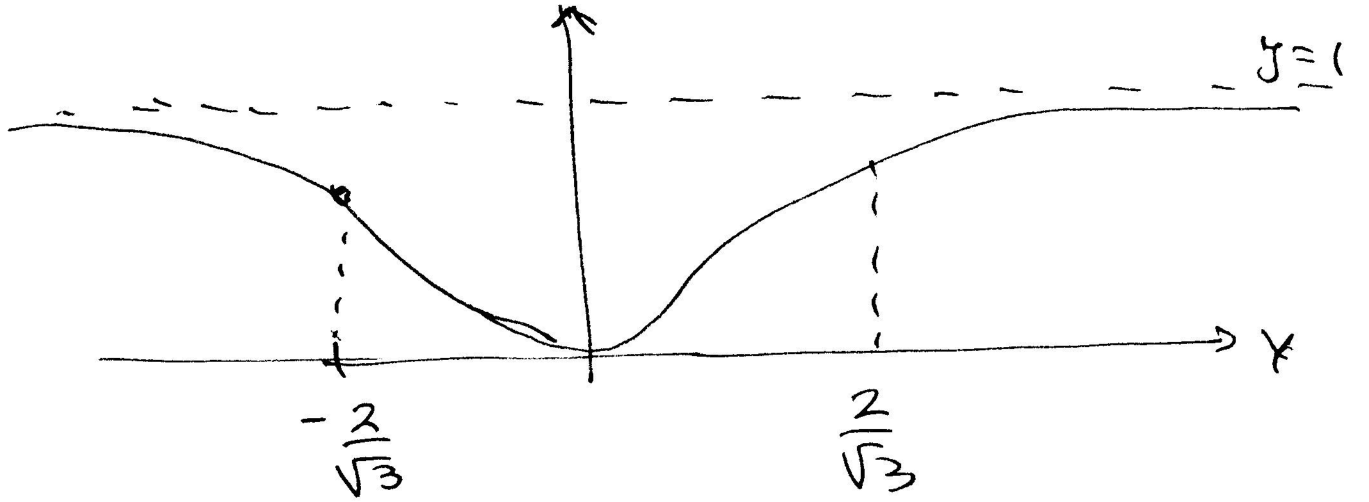
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 - \dfrac{4}{4+x^2} = 1$

Asíntota horizontal $y = 1$

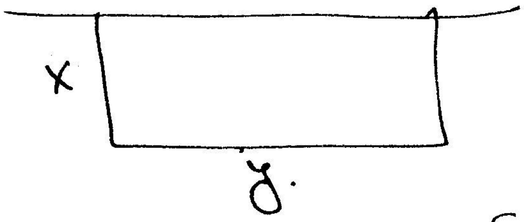
(f) Notemos que $f(0) = 0$ y que $f(x) > 0$

$$\frac{x^2}{4+x^2} > 0, \quad x \neq 0$$

Entonces



3.) $L_0 = 2400$ m.



$A = \text{Area} = x\,y.$

$L_0 = 2x + y$, es la longitud de la cuerda

Entonces $\Rightarrow y = L_0 - 2x$

$$A = x\,(L_0 - 2x).$$

$$\Rightarrow \quad A(x) = L_0 x - 2x^2$$

$$y \quad A'(x) = L_0 - 4x$$

$$A' = 0 \quad \text{si} \quad \boxed{x = \frac{L_0}{4}} \quad \text{ie} \quad \boxed{x = 600\text{m}}$$

$$\Rightarrow \quad y \quad y = 2400 - 2 \cdot 600$$

$$\boxed{y = 1200\text{ m}}.$$

PARTE III.

1. Derivar:

$$\frac{dh}{dx} = \sqrt{\operatorname{Arctan}(1+e^{-x})} + \ln^3(7x^2+x)$$

$$= \frac{\frac{d}{dx}\operatorname{Arctan}(1+e^{-x})}{2\sqrt{\operatorname{Arctan}(1+e^{-x})}} + 3\ln^2(7x^2+x)\frac{d}{dx}\left(\ln(7x^2+x)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{Arctan}(1+e^{-x})}}\cdot\frac{1}{1+(1+e^{-x})^2}\,\frac{d}{dx}(1+e^{-x}) +$$

$$+ 3\ln^2(7x^2+x)\cdot\frac{14x+1}{7x^2+x}$$

Entonces:

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = \frac{\cancel{-}e^{-x}}{2\sqrt{\operatorname{Arctan}(1+e^{-x})}\cdot\left(1+(1+e^{-x})^2\right)} + 3\ln^2(7x^2+x)\,\frac{14x+1}{7x^2+x}}$$

2. Usaremos derivación logarítmica:

$$H \equiv \operatorname{Log} h = \log(\operatorname{sen} x)^{e^x} = e^x \operatorname{Log}(\operatorname{sen} x)$$

Entonces, por una parte:

$$H' = \frac{1}{h}h'$$

y por otra:

$$H' = e^x \operatorname{Log}(\operatorname{sen} x) + e^x\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

$$H' = e^x\left(\operatorname{Log}|\sin x| + \frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

y como $\frac{h'}{h} = H'$, entonces

$$h' = e^x\left(\operatorname{Log}|\sin x| + \frac{\cos x}{\sin x}\right)h.$$

$$\boxed{h'(x) = e^x (\sin x)^{e^x}\left(\operatorname{Log}|\sin x| + \frac{\cos x}{\sin x}\right).}$$

(3). $f(x) = (1-x)e^{-x}$

$$f'(x) = -e^{-x} + (1-x)e^{-x}(-1)$$

i.e. $f'(x) = -e^{-x}\left(1 + (1-x)\right)$.

$$\boxed{f'(x) = -e^{-x}(2-x).}$$

$$f''(x) = e^{-x}(2-x) - e^{-x}(-1).$$

$$= e^{-x}(2-x+1)$$

i.e. $\boxed{f''(x) = e^{-x}(3-x)}$.

(a) Dominio$(f) = \mathbb{R}$, pues es el producto de un polinomio y una exponencial.

Raíces: $f(x) = 0$

$$(1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$ es la única raíz.

$e^{x} \neq 0$

Asíntotas: Como $f(x)$ está definida $\forall x$, no hay asíntotas verticales

Ahora $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} (1-x)e^{-x} = 0.$

entonces $y = 0$ es asíntota horizontal;

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$, por lo que no hay otra asíntota.

(b) $f'(x) = -e^{-x}(2-x).$

$f \nearrow$, si $f'(x) > 0$, si $2 - x < 0$ i.e: $2 < x$;

$f \searrow$ si $f'(x) < 0$, si $2 - x > 0$ i.e. $x < 2$

(c) Por lo que hay un solo punto crítico

$x = 2$

y es un mínimo local.

(d) Intervalos de concavidad:

$$f''(x) = e^{-x}(3-x).$$

Como $e^{-x} > 0$ siempre, entonces

$f'' > 0$, si $3-x > 0$ i.e. $x < 3$ y es

cóncava hacia arriba

$f'' < 0$, si $3-x < 0$, i.e $3 < x$ y es

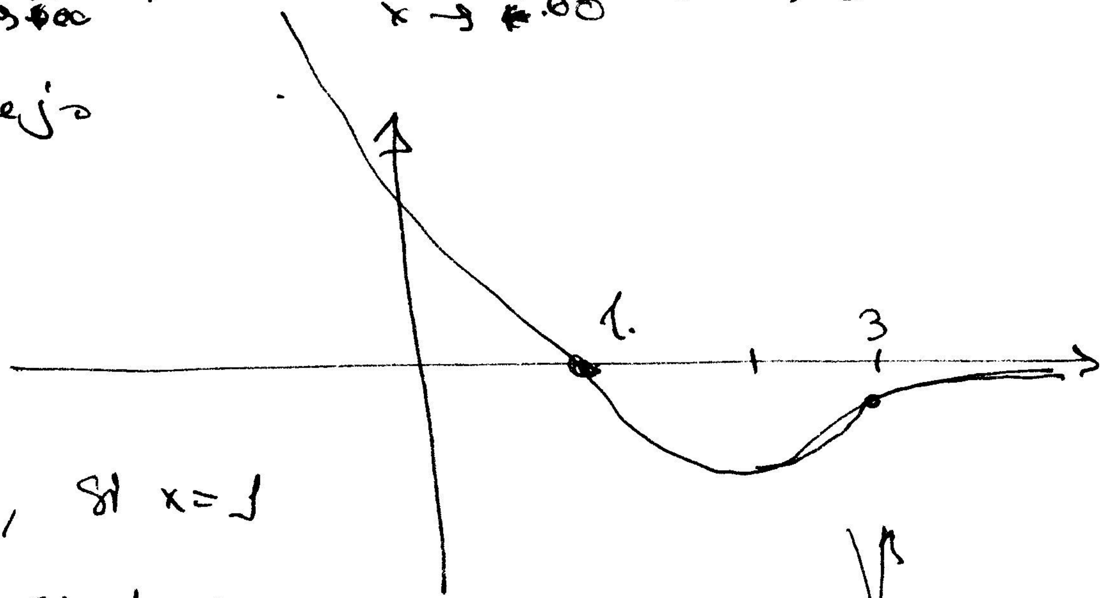
concava hacia abajo

(e). $\Rightarrow$ tiene un punto de inflexión en $\boxed{x=3}$

(f) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (1-x)e^{-x} = 0$

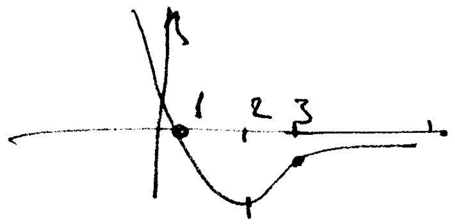
y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (1-x)e^{-x} = \infty$.

(g) Bosquejo



$f(x) = 0$, si $x = 1$

$f(x) > 0$, si $1-x > 0$ i.e $x < 1$



4. La función $h(x) = e^x + e^{-x}$

tiene derivada $h'(x) = e^x - e^{-x}$.

$h'(x) > 0$, si $\quad e^x - e^{-x} > 0$

$$e^x > e^{-x}$$

$$e^{2x} > 1.$$

$$\Rightarrow \quad \log e^{2x} > \log 1$$

$$2x > 0.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} h'(x) > 0, & \text{si } x > 0 \\ h'(x) < 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces h es invertible en $[0, \infty)$.

o en $[-\infty, 0]$.

Como: $\dfrac{e^2+1}{e} = h(1)$, entonces:

$$h^{-1}\left(\frac{e^2+1}{e}\right) = h^{-1}(h(1)) = 1$$

Entonces $\boxed{h^{-1}\left(\dfrac{e^2+1}{e^2}\right) = 1}$

5. El polinomio de Taylor de $\cos\theta$ es:

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots$$

pues pide polinomio de grado 5 (o más).

Pero esto es cerca de $\theta = 0$;

Notemos que:

$$\cos(92^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta\right)$$

donde $\Delta\theta = 2^\circ \cdot \frac{2\pi}{360^\circ}$ radianes:

y como:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\Delta\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\Delta\theta$$

$$= -\sin\frac{\pi}{2}\sin\Delta\theta$$

$$= -\sin(\Delta\theta)$$

pero:

$$\sin\Delta\theta = \Delta\theta - \frac{1}{3!}(\Delta\theta)^3 + \frac{1}{5!}(\Delta\theta)^5 + \cdots$$

Así:

$$\cos(92^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \Delta\theta\right) = -\sin(\Delta\theta)$$

$$= -\Delta\theta + \frac{1}{3!}(\Delta\theta)^3 \mp \frac{1}{5!}(\Delta\theta)^5 + \cdots$$

$$\boxed{\cos(92^\circ) \cong -\frac{4\pi}{360} - \frac{1}{6}\left(\frac{4\pi}{360}\right)^3 - \frac{1}{120}\left(\frac{4\pi}{360}\right)^5 + \cdots}$$

End of the exam.