CÁLCULO DIFERENCIAL. UAM-AZCAPOTZALCO Tu. 9/Dic/2014

Examen Parcial #3. Soluciones.

---

(1) Sea $f(x) = (1+2x)^{1/2\ln x}$

Queremos calcular $\lim_{x\to\infty} f(x)$, para calculemos:

$$\lim_{x\to\infty} \ln(f(x)) = \lim_{x\to\infty} \ln(1+2x)^{1/2\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\ln x}\ln(1+2x)$$

Es un límite indeterminado de la forma "$\frac{\infty}{\infty}$".

Usemos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+2x)}{2\ln(x)} \underset{\text{L'Hôpital.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln(1+2x))'}{2(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{1+2x}\right)}{\left(\frac{2}{x}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+2x}.$$

que también es indeterminado de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, y podemos usar L'Hôpital nuevamente:

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(1+2x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

o bien

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x/x}{(1+2x)/x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}+2}$$

dividiendo entre x, numerador y denominador

$$= \frac{1}{0+2} = 1/2.$$

Así pues: $\lim_{x\to\infty} \ln(1+2x)^{1/2\ln x} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to\infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\ln x}} = e^{1/2}}$

(2) Tomamos $\theta = 132°$ y $\theta_0 = 135° = \frac{3\pi}{4}$.

Entonces $\theta - \theta_0 = 132° - 135° = -3° = -3\frac{\pi}{180} = \frac{-\pi}{60}$

ie $\theta - \theta_0 = -\frac{\pi}{60}$

Así pues:

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(\theta_0) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f'(x) = \cos x \quad f'(\theta_0) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$f''(x) = -\sin x$

$f''(\theta_0) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

El polinomio de Taylor de grado 2 es entonces.

$$f(\theta) \cong P_2(\theta) = f(\theta_0) + f'(\theta_0)(\theta - \theta_0) + \frac{1}{2!}f''(\theta_0)(\theta - \theta_0)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\pi}{60}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{\pi}{60}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\pi}{60} - \frac{1}{2}\frac{\pi^2}{60^2}\right)$$

$\boxed{f(\theta) = \sin(132) \cong 0.7431615.}$ (Usando la calculadora)

Usando la calculadora directamente:

$$\sin(132°) = 0.743144$$

$$|\text{Error}| \leq |0.000017| \leq 0.00002 = \frac{2}{10000}$$

③ Tenemos la función.

$$f(x) = \frac{2}{3-e^{-2x}}$$

(a) $Dom(f)$ es tal que $3 - e^{-2x} \neq 0$.

Ahora $3 - e^{-2x} \neq 0 \Rightarrow 3 \neq e^{-2x} \Rightarrow \ln 3 \neq -2x$

$\Rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \ln 3$.

Así:

$$Dom(f) = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\tfrac{1}{2} \ln 3 \right\} =$$

$$= \left(-\infty, -\tfrac{1}{2}\ln 3\right) \cup \left(-\tfrac{1}{2}\ln 3, \infty\right).$$

(b) Para calcular f^{-1}, escribimos $x = \frac{2}{3-e^{-2y}}$ y resolvemos para "y":

$x(3-e^{-2y}) = 2 \Rightarrow 3x - e^{-2y}x = 2 \Rightarrow -e^{-2y}x =$

$\Rightarrow 3x - 2 = e^{-2y}x \Rightarrow \frac{3x-2}{x} = e^{-2y} \Rightarrow \ln\left(\frac{3x-2}{x}\right) = -2y$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{3x-2}{x}\right) = y \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{3x-2}\right)}$

Así $\boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{3x-2}\right)}$

Su dominio requiere $\frac{x}{3x-2} > 0$. Así pues, hay dos casos

Caso (a) $\left.\begin{array}{l} x > 0 \\ 3x-2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x > 0 \\ x > 2/3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$

Caso (b) $\left.\begin{array}{l} x < 0 \\ 3x-2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x < 0 \\ x < 2/3 \end{array}\right\} \Rightarrow (-\infty, 0)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Dom}(f^{-1}) = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \\ \mathrm{Ran}(f^{-1}) = \mathrm{Dom}(f) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\ln 3\right) \cup \left(-\frac{1}{2}\ln 3, \infty\right) \end{array}}$$

(c) Su derivada, Calculando directamente la derivada:

$$\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\left(\frac{x}{3x-2}\right)} \cdot \frac{(3x-2)\cdot 1 - x\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{1}{2}\frac{-2}{(3x-2)x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{x(2-3x)}}$$

O usando la fórmula: $\displaystyle\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{d}{dy}f\right)\Big|_{y=f^{-1}(x)}}$

Calculemos primero:

$$\frac{df}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\frac{2}{3-e^{-2y}}\right) = \frac{-2(-e^{-2y}\cdot(-2))}{(3-e^{-2y})^2} = \frac{-2^2 e^{-2y}}{(3-e^{-2y})^2}$$

Notemos que $\displaystyle\frac{1}{3-e^{-2y}} = \frac{x}{2}$ y $\displaystyle e^{-2y} = \frac{3x-2}{x}$.

(i.e., aquí estamos usando $y = f^{-1}(x)$).

Entonces:

$$\frac{df}{dy} = -4\left(\frac{3x-2}{x}\right)\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -(3x-2)x.$$

Así pues: $\boxed{\displaystyle\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{-x(3x-2)}}$ y coinciden.

(4) Calcule la derivada de $g(x) = \operatorname{Arcsin}\left(x + (\sin x)^x\right)$.

Por la regla de la cadena:

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - (x+\sin x)^{2x}}} \cdot \left(1 + \frac{d}{dx}\left((\sin x)^x\right)\right)$$

Falta calcular $\frac{d}{dx}(\sin x)^x$. Para ello, calculamos

$$(*) \qquad \frac{d}{dx} \ln (\sin x)^x = \frac{\frac{d}{dx}(\sin x)^x}{(\sin x)^x} \qquad \text{, por una parte } (*)$$

Por otra:

$$(**) \qquad \frac{d}{dx} \ln(\sin x)^x = \frac{d}{dx}\left(x \ln(\sin x)\right) = 1 \cdot \ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x} \quad \ldots (**)$$

Comparando $(*)$ con $(**)$, tenemos:

$$\frac{\frac{d}{dx}(\sin x)^x}{(\sin x)^x} = \ln(\sin x) + x\frac{\cos x}{\sin x}.$$

Así: $$\frac{d}{dx}(\sin x)^x = (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x}\right).$$

Por tanto:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dx} g &= \frac{d}{dx} \operatorname{Arcsin}\left(x + (\sin x)^x\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - (x + (\sin x)^x)^2}} \cdot \left(1 + (\sin x)^x \left(\ln(\sin x) + x \frac{\cos x}{\sin x}\right)\right) \end{aligned}}$$

(5) La ecuación se puede escribir como.

$$\frac{1}{\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

pues $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$. Entonces:

$$\tan\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{x+1} = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

$$x - \sqrt{3}x = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad (1-\sqrt{3})x = \sqrt{3} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{x = \frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}}$$