Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Lunes 16 de febrero de 201[illegible]

Examen #1. Invierno 2015. UAM-Azcapotzalco

① (a) $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx} = e^{\int 2t\,dt} = e^{t^2}$; Factor integrante

Tenemos que calcular la integral:

$$\int g(x)\mu(x)\,dx = \int \left(2xe^{-x^2}\right)e^{x^2}dx = \int 2x\,dx = x^2.$$

y ahora sí podemos usar la fórmula:

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\int g(x)\mu(x)\,dx + \frac{C}{\mu(x)} = \frac{1}{e^{\,^2}}\cdot{}^2 + \frac{C}{e^{\,^2}}$$

Entonces.
$$\boxed{y(t) = Ce^{-\,^2} + te^{-\,^2}}$$

1.(b). Primero resolvemos la ecuación homogénea:

$$\frac{dy_h}{dx} + 2xy_h = 0 \Rightarrow \frac{dy_h}{y_h} = -2x\,dx$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log}|y_h| = -x^2 + \tilde{C} \Rightarrow \text{Tomar } \tilde{C}=0 \text{ y } y_h(x) = e^{-x^2}$$

Ahora $Cy_h(x)$ es solución, y "variamos C", para encontrar una solución particular; $y_p(x) \equiv$

$$\left.\begin{array}{c} Cy_h(x) \\ \searrow \quad \searrow \\ y_p(x) = A(x)y_h(x) \end{array}\right\}$$

Substituimos $y_p(x)$ en la ecuación:

$$\frac{d}{dx}y_p + 2xy_p = 2xe^{-x^2}$$

i.e. $\frac{d}{dx}(A(x)y_h) + 2x(A(x)y_h) = 2xe^{-x^2}$

$= (=$

y desarrollamos. $A'(x)y_u + A(x)y_u' + 2xA(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$

$$A'(x)e^{-x^2} + \underbrace{A(x)(-2xe^{-x^2}) + 2xA(x)e^{-x^2}}_{=0} = 2xe^{-x^2}$$

[O bien: $A'(x)y_u + A(x)\underbrace{(y_u' + 2xy_u)}_{=0} = 2xe^{-x^2}$, de

$=0$, pues y_u resuelve la ec. homogénea

$$\Rightarrow \quad A'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}$$

$$A'(x) = 2x$$

$$A(x) = \int 2x\,dx = x^2$$

$$\boxed{A(x) = x^2}$$

$$A'(x)y_u + = 2xe^{-x^2}$$

$$A'(x) = \frac{2xe^{-x^2}}{y_u}$$

$$A(x) = \int 2x\frac{e^{-x^2}}{y_u(x)}dx = \int 2x\frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}}dx = \int 2x\,dx = x^2$$

$$\boxed{A(x) = x^2}$$

Entonces

$$y_p(x) = A(x)y_u(x) = x^2e^{-x^2}.$$

Entonces la solución general

$$y(x) = Cy_u(x) + y_p(x)$$

es $\boxed{y(x) = Ce^{-x^2} + x^2e^{-x^2}}$, misma solución.

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - x^3}{4 + y^3}$ es separable.

i.e.

$$(4 + y^3)\,dy = (4x - x^3)\,dx.$$

Integrando.

$$4y + \frac{1}{4}y^4 = 2x^2 - \frac{x^4}{4} + C.$$

Usando $y(0) = 1$; i.e. $x = 0$, $y = 1$.

$$4 + \frac{1}{4} = 0 - 0 + C \Rightarrow \boxed{C = \frac{17}{4}}$$

Así:

$$\boxed{\frac{y^4}{4} + 4y - 2x^2 + \frac{x^4}{4} = \frac{17}{4}}$$ Solución Implícita

Dado que la ecuación es de 4° grado, la dejamos así, en su forma más simple, para no usar la dichosa ecuación de 4° grado.

③ La ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2},$$

tiene un forzamiento homogéneo.

$$f(x,y) = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}. \quad \text{Si} \quad \begin{matrix} x \to \alpha x \\ y \to \alpha y \end{matrix} \Rightarrow f(\alpha x, \alpha y) = f(x,y)$$

pues:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{(\alpha x)^2 + (\alpha x)(\alpha y) + (\alpha y)^2}{(\alpha x)^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = f(x,y)$$

Entonces:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

y usar $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, cambio de variable

$$\Rightarrow \quad y(x) = x\,v(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v(x) + x\frac{dv}{dx}.$$

Así:

$$v(x) + x\frac{dv}{dx} = 1 + v + v^2$$

i.e. $\quad x\dfrac{dv}{dx} = 1 + v^2$, y es separable.

$$\frac{dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x}.$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Arctan}(v) = \operatorname{Log}|x| + C$$

$$\Rightarrow \quad v(x) = \tan\left(\operatorname{Log}|x| + C\right)$$

y como $v(x) = \frac{y(x)}{x}$, entonces:

$$\boxed{y(x) = x\tan\left(\operatorname{Log}|x| + C\right)}$$

(4) Resolver: $\underbrace{1}_{M(x,y)} + \underbrace{\left(\frac{x}{y} - \sin y\right)}_{N(x,y)} \frac{dy}{dx} = 0.$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial M}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y} \end{array}\right\} \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \underline{\text{no}} \text{ es exacta.}$$

Usar factores integrantes.

Recordatorio: $(\mu M) + (\mu N)\frac{dy}{dx} = 0$, es exacta si $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$

i.e.: $\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$.

(a) Si $\mu = \mu(x) \Rightarrow \mu_y = 0 \Rightarrow \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$, sólo función de x

(b) o bien, si $\mu = \mu(y) \Rightarrow \mu_x = 0 \Rightarrow \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_x - M_y}{M}$, sólo función de x

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{0 - 1/y}{\frac{x}{y} - \sin y}, \left\{\begin{array}{l}\text{también depende de } y. \\ \text{Depende de } x, y.\end{array}\right.$$

$$\frac{N_x - \quad}{M} = \frac{1/y - 0}{1}, \text{ ¡depende sólo de "}y\text{"!}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{\mu} d\mu = \frac{1}{y} dy$$

$$\Rightarrow \operatorname{Log}|\mu| = \operatorname{Log}|y| \Rightarrow \boxed{\mu(y) = y} \text{ es el factor integrante.}$$

Entonces, la ecuación $\mu M + \mu N \frac{dy}{dx} = 0$, es:

$$\mu + \mu\left(\frac{x}{y} - \sin y\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y + y\left(\frac{x}{y} - \operatorname{sen} y\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\underbrace{y}_{\tilde{M}} + \underbrace{(x - y\operatorname{sen} y)}_{\tilde{N}}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\tilde{M}_y = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1\\ \tilde{N}_x = \frac{\partial}{\partial x}(x - \operatorname{sen} x) = 1\end{array}\right\} \text{Exacta}$$

$\Rightarrow \exists\ \psi(x,y)$ tal que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = y \Rightarrow \psi(x,y) = xy + f(y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y} = x + f'(y) \quad \ldots\ldots (*)$$

Pero $\frac{\partial \psi}{\partial y} = \tilde{N}(x,y) = x - y\operatorname{sen} y$ $\Rightarrow$ comparando con $(*)$:

$$f'(y) = -y\operatorname{sen} y \Rightarrow f(y) = -\int y\operatorname{sen} y\, dy,$$

e integrando por partes:

$$f(y) = y\cos y - \int \cos y\, dy = y\cos y - \operatorname{sen} y$$

Entonces: $\psi(x,y) = C$ es solución implícita

i.e.

$$xy + f(y) = C$$

i.e. $\boxed{xy + y\cos y - \operatorname{sen} y = C}$