Ecuaciones Diferenciales Ordinarias UAM-Azcapotzalco

Examen #3. Trimestre Primavera 2015.

(1) $m = 2kg$, $b = ?$, $k = ?$.

(a) Fuerza gravedad $= mg$ equilibrio Fuerza de Hooke $= k\Delta x$

$\Rightarrow mg = k\Delta x \Rightarrow k = \frac{mg}{\Delta x} = \frac{(2)(10)}{(2.5)} \frac{N}{m}$

$k = \frac{20}{5/2} = \frac{40}{5} = 8\ N/m$ $\boxed{k = 8\ N/m}$

(b) La ecuación de movimiento: $\ddot{y} + b\dot{y} + 8y = 0$

No hay fuerzas externas.

Críticamente amortiguado: $b^2 - 4mk = 0$

$[b] = \frac{N}{m/s} = \frac{kg\ m/sec^2}{m/sec} = \frac{kg}{sec}$ $b^2 - 4\cdot 2\cdot 8 = 0$

$\Rightarrow b^2 = 64 \Rightarrow \boxed{b = 8\ \frac{kg}{sec}}$

(c) Se tiene, $2\ddot{y} + 8\dot{y} + 8y = 0$. Ec. 1) lineal 2) homogénea 3) Coef. const $\Big\}\ y = e^{rt}$

$2r^2 + 8r + 8 = 0$

ie $r^2 + 4r + 4 = 0$

$(r+2)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{r_1 = r_2 = -2\ 1/sec}$

$\Rightarrow y_1(t) = e^{-2t}$ and $y_2(t) = te^{-2t}$ (Igual $r_{1,2} = -\frac{b}{2m} = -\frac{8}{2\cdot 2}$ $\Rightarrow \boxed{r_{1,2} = -2}$)

Solución general:

$$y(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 te^{-2t}$$

O bien: $\boxed{y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}}$

$$\dot{y}(t) = C_2 e^{-2t} + (C_1 + C_2 t)e^{-2t}(-2)$$

$$\ddot{y}(t) = (-2C_2 t + C_2 - 2C_1)e^{-2t}$$

$y(0) = 3 \Rightarrow C_1 + 2C_1 \cdot 0 = 3 \Rightarrow \boxed{C_1 = 3}$

$\dot{y}(0) = 5 \Rightarrow C_2 - 2C_1 = 5 \Rightarrow C_2 = 5 + 2C_1 = 5 + 2 \cdot 3$

$\boxed{C_2 = 11}$

$\boxed{y(t) = (3 + 11t)e^{-2t} \text{ metros}}$

(d) Queremos T, que $y(T) = 0$

i.e. $(3 + 11T)e^{-2T} = 0$

Como $e^{-2T} > 0 \Rightarrow 3 + 11T = 0$

$\Rightarrow T = -\frac{3}{11}$ sec,

pero esto ~~fue~~ sería antes de soltar la partícula.

Por tanto, nunca pasa por la posición de equilibrio.

(2) (*) Primero, debemos resolver la ec. homogénea:

$$\ddot{y}_h + 9y_h = 0$$

Ec. 1) lineal
2) homogénea
3) Coef const.

$$\left.\right\} \Rightarrow y_h = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 9 = 0$$

$$\boxed{r = \pm 3i}$$

$$\Rightarrow y_1(t) = e^{3it} \qquad y_2(t) = e^{-3it}.$$

O por la fórmula de Euler:

$$y_1(t) = \cos 3t \; ; \quad y_2(t) = \operatorname{sen} 3t.$$

Así: $y_h(t) = C_1 \cos 3t + C_2 \operatorname{sen} 3t.$

(*) Ahora, solución particular

$Y_1(t) = A\cos 3t + B\operatorname{sen}(3t)$, no es sensata, pues repite $y_1(t)$.

$$\Rightarrow y_p(t) = t(A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t)$$

ahora sí es sensata, pues no repite $y_h(t)$.

Usando:
$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$

$$\ddot{y}_p = 0 + 2(1)(+3)(-A\operatorname{sen} 3t + B\cos 3t) + t(-9)(A\cos 3t + B\operatorname{sen} 3t).$$

i.e. $$\ddot{y}_p = \cos 3t\,(-9At + 6B) + \operatorname{sen} 3t\,(-9Bt - 6A)$$

Substituyendo en la ecuación: $\ddot{y}_p + 9y_p = 2\cos 3t$.
se tiene:

$$(-\cancel{9At} + 6B)\cos 3t + (-\cancel{9Bt} - 6A)\sin 3t$$
$$+ 9t\cancel{(A\cos 3t + B\sin 3t)} = 2\cos 3t.$$

i.e.

$$6B\cos 3t - 6A\sin 3t = 2\cos 3t.$$

$$\Rightarrow -6A = 0 \qquad \boxed{A = 0}$$
$$6B = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{1}{3}}$$

Sol'n particular: $\boxed{y_p(t) = \frac{t}{3}\sin 3t}$

Sol'n general: $\boxed{y(t) = C_1\cos 3t + C_2\sin 3t + \frac{t}{3}\sin 3t}$

Ahora $\dot{y}(t) = -3C_1\sin 3t + 3C_2\cos 3t +$
$$+ \frac{1}{3}\sin 3t + t\cos 3t$$

Condiciones iniciales $y(0) = C_1 + 0 + 0 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{C_1 = 1}$
$\dot{y}(0) = 0 + 3C_2 + 0 + 0 = 0 \quad \boxed{C_2 = 0}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \cos 3t + \frac{t}{3}\sin 3t}$$