DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EVALUACIÓN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trimestre: 15P.-. Fecha: 24-07-15.-. Horario: 10:00-13:00 hr.-. Grupo:_______

ALUMNO:____________________________________ Matrícula:_______________

NOTA: La Evaluación GLOBAL consta de los ejercicios marcados al inicio con un ($\bullet N\%$). Todos las respuestas necesitan desarrollo o justificación.

PRIMERA PARTE

Resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

1. ($\bullet$10%) $x^2 y' + xy = e^x y^{-2}$; con $y(1) = 1$

2. ($\bullet$10%) $(x - \operatorname{sen} y)\, dx + x \cos y\, dy = 0$

3. ($\bullet$10%) $e^x y\, dy = (x e^{-2y} + e^{3x-2y})\, dx$; con $y(0) = 0$

Resolver los siguientes problemas.

4. ($\bullet$10%) Una sustancia radioactiva se desintegra con rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante $t \geq 0$. Si inicialmente habían 10 gramos y al cabo de 12 años se observa que se ha desintegrado el 0.5 % de dicha sustancia: (a) ¿Qué cantidad de sustancia habrá al cabo de 100 años? (b) ¿Cuál es la vida media de dicha sustancia?

5. La temperatura del aire en un cuarto se mantiene constante e igual a $20°C$. Se coloca dentro del cuarto una barra metálica con temperatura inicial $T_0 = 95°C$. Suponiendo que después de 10 minutos la barra se ha enfriado a $80°C$: (a) Calcular la temperatura de la barra al cabo de 30 minutos. (b) ¿En qué minuto la temperatura de la barra será de $35°C$?

SEGUNDA PARTE

1. ($\bullet$15%) Aplicando variación de parámetros, resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = \sec^2 2x$$

2. ($\bullet$15%) Aplicando coeficientes indeterminados, resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = (2x + 1)\, e^{3x}$$

3. (•10%) Obtener la solución general de la ecuación diferencial $x\,y'' - (x+1)\,y' + y = 0$, considerando que $y_1 = e^x$ es una solución de ella.

4. Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$4y'' - 4y' + y = 53\,\mathrm{sen}\,2x + 9\cos 2x \quad ; \text{con} \quad y(0) = 3\ ,\ \ y'(0) = -2\ ,$$

considerando que $y_p(x) = -3\,\mathrm{sen}\,2x + \cos 2x$ es una solución particular de la ecuación diferencial.

TERCERA PARTE

1. (•20%) Un resorte de constante $k = 4$ N/m está conectado en uno de sus extremos a un cuerpo de masa $m = 1$ kg y en el otro a una pared. El sistema masa-resorte descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Considerando la posición inicial $x_0 = 0.4$ m y la velocidad inicial $v_0 = 4$ m/s

(a) Calcular la posición $x(t)$ de la masa m en la forma $x(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi)$ y determinar la amplitud, el ángulo de fase, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante.

(b) ¿En qué instantes pasa m por la posición de equilibrio? ¿Con qué rapidez?

2. Un cuerpo de masa $m = 2$ kg está unido a un resorte de constante $k = 2$ N/m y a un amortiguador de constante $c = 4$ Ns/m Considerando la posición inicial $x_0 = 1$ m y la velocidad inicial $v_0 = -3$ m/s

(a) Calcular la posición $x(t)$ de la masa m y decir que tipo de movimiento amortiguado resulta.

(b) ¿En qué instante pasa m por la posición de equilibrio? ¿Con qué velocidad?

Firma:________________