DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EVALUACIÓN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trimestre: 15P.-. Fecha: 24-07-15.-. Horario: 15:00-18:00 hr.-. Grupo:_______

ALUMNO:______________________________________ Matrícula:________________

NOTA: La Evaluación GLOBAL consta de los ejercicios marcados al inicio con un ($\bullet N\%$). Todos las respuestas necesitan desarrollo o justificación.

PRIMERA PARTE

Resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

1. ($\bullet$10%) $y' - y = e^{2x}\, y^3$; con $y(0) = 1$

2. ($\bullet$10%) $(x + 3\cos y)\, dx - (x \operatorname{sen} y)\, dy = 0$

3. ($\bullet$10%) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x - x^3\, e^{-x^2}}{e^{-x^2}(4 + 2y)}$; con $y(0) = 1$

Resolver los siguientes problemas.

4. ($\bullet$10%) El 24 de Julio de 1915 fueron encontrados 100 gramos de cierto material radioactivo *Hu*; y el día de hoy, 24 de Julio de 2015, quedan 75 gramos del mismo. Suponiendo que la masa $M(t)$ de dicho material se pierde de acuerdo a la ley de decaimiento radioactivo $\dfrac{dM}{dt} = -kM$: (a) Calcule la constante de decaimiento k. (b) ¿Cuál es la vida media del *Hu*? (c) ¿Cuál será la masa de *Hu* el 24 de Julio de 2115 ?

5. El día 1 de Enero de 1900 se fundó un pueblo al norte de Sonora con 100 habitantes y el 1 de Enero de 2000 el pueblo contaba con 10,000 habitantes. Suponiendo que la población $P(t)$ de dicho pueblo crece de acuerdo a la ley de Malthus $\dfrac{dP}{dt} = rP$: (a) Calcule la tasa de natalidad r. (b) ¿En cuánto tiempo se triplicó la población inicial? (c) ¿Cuál será la población del pueblo el día 1 de Enero de 2100 ?

SEGUNDA PARTE

1. ($\bullet$15%) Aplicando variación de parámetros, resolver la ecuación diferencial

$$4\, y'' + y = 2\sec\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EVALUACIÓN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trimestre: 15P.-. Fecha: 24-07-15.-. Horario: 15:00-18:00 hr.-. Grupo:_______

ALUMNO:______________________________________ Matrícula:_______________

NOTA: La Evaluación GLOBAL consta de los ejercicios marcados al inicio con un ($\bullet N\%$). Todos las respuestas necesitan desarrollo o justificación.

PRIMERA PARTE

Resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

1. ($\bullet$10%) $y' - y = e^{2x} y^3$; con $y(0) = 1$

2. ($\bullet$10%) $(x + 3\cos y)\,dx - (x \operatorname{sen} y)\,dy = 0$

3. ($\bullet$10%) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{8x - x^3 e^{-x^2}}{e^{-x^2}(4 + 2y)}$; con $y(0) = 1$

Resolver los siguientes problemas.

4. ($\bullet$10%) El 24 de Julio de 1915 fueron encontrados 100 gramos de cierto material radioactivo *Hu*; y el día de hoy, 24 de Julio de 2015, quedan 75 gramos del mismo. Suponiendo que la masa $M(t)$ de dicho material se pierde de acuerdo a la ley de decaimiento radioactivo $\dfrac{dM}{dt} = -kM$: (a) Calcule la constante de decaimiento k. (b) ¿Cuál es la vida media del *Hu*? (c) ¿Cuál será la masa de *Hu* el 24 de Julio de 2115 ?

5. El día 1 de Enero de 1900 se fundó un pueblo al norte de Sonora con 100 habitantes y el 1 de Enero de 2000 el pueblo contaba con 10,000 habitantes. Suponiendo que la población $P(t)$ de dicho pueblo crece de acuerdo a la ley de Malthus $\dfrac{dP}{dt} = rP$: (a) Calcule la tasa de natalidad r. (b) ¿En cuánto tiempo se triplicó la población inicial? (c) ¿Cuál será la población del pueblo el día 1 de Enero de 2100 ?

SEGUNDA PARTE

1. ($\bullet$15%) Aplicando variación de parámetros, resolver la ecuación diferencial

$$4\,y'' + y = 2\sec\left(\tfrac{t}{2}\right)$$

2. (•15%) Aplicando coeficientes indeterminados, resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 3y' - 4y = -8\,e^{x}\cos 2x$$

3. (•10%) Obtener la solución general de la ecuación diferencial $x^2\,y'' + x\,y' - y = 0$, considerando que $y_1 = x$ es una solución de ella.

4. Obtener la solución del problema de valores iniciales

$$y'' + y' - 2y = -2x \quad ; \text{ con } \ y(0) = 1 \ , \ \ y'(0) = \tfrac{3}{4} \, ,$$

considerando que $y_p(x) = x + \frac{1}{2}$ es una solución particular de la ecuación diferencial.

TERCERA PARTE

1. (•20%) Un cuerpo de masa 2 kg estira un resorte 5 cm.

   (a) Calcule el valor de la constante del resorte.

   Posteriormente, el cuerpo se desplaza 15 cm en la dirección negativa y se suelta. El medio en el que se mueve no es viscoso.

   (b) Calcular la posición $x(t)$ de la masa m en la forma $x(t) = A\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi)$ y determinar la amplitud, el ángulo de fase, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante.

   (c) ¿En qué instantes pasa m por la posición de equilibrio? ¿Con qué rapidez?

2. Un cuerpo de masa $m = 0.4$ kg está unido a un resorte de constante $k = 4$ N/m y ambos se encuentran en un medio viscoso con constante de resistencia β. Considerando la posición inicial $x_0 = 0.5$ m y la velocidad inicial $v_0 = 0$ m/s

   (a) Determinar el valor de β tal que el movimiento sea críticamente amortiguado.

   (b) Con el valor de β encontrado, calcular la posición $x(t)$ de la masa m en todo tiempo t.

   (c) ¿En qué instante pasa m por la posición de equilibrio?

Firma: ________________