CÁLCULO DIFERENCIAL

PROF. JESÚS ADRIÁN ESPÍNOLA ROCHA.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

EXAMEN #2.
FECHA:
VIERNES 11 DE MARZO DE 2016.

Nombre: ANSWER KEY.

Instrucciones.

(1) El examen consta de TRES problemas.
(2) El total de puntajes es de 100 puntos.
(3) Para recibir el total del puntaje en cada problema, SIMPLIFIQUE sus respuestas y **EXPLIQUE** sus argumentos.
(4) Apague y guarde su teléfono celular. Retiraré el examen y yo decidiré sobre su calificación a quienes sorprenda usádolos durante el mismo.

---

(1) Considere la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si} \quad 0 < x \leq 3\pi, \\ 1. & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$

(a) **(10 puntos).** Determine si la función cumple las hipótesis del teorema del valor medio.

(b) **(10 puntos).** De acuerdo a lo que encontró en el inciso anterior, ¿qué puede decir de la función f?

(2) **(40 puntos).** De un bosquejo de la gráfica de la siguiente función

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} + 1.$$

Para ellos, siga los siguientes pasos. (Pueden parecer muchos pasos, pero no lo son. Todos los hemos hecho en clase).

(a) Encuentre dominio y simetrías
(b) Encuentre asíntotas.
(c) Determine f' y f''.
(d) Determine puntos críticos.
(e) Determine los intervalos en donde f crece y decrece.
(f) Determine los puntos de inflexión. Determine la concavidad.
g) Usando sea el criterio de la primera o segunda derivada, determine los mínimos y máximos locales de f. Diga los valores de x en donde se alcanzan dichos mínimos y máximos. Luego, determine los mínimos y máximos globales, si los hay.
(h) Dibuje en el plano cartesiano los puntos máximos y mínimos, y los de inflexión. Las intersecciones con los ejes.
(i) Trace la gráfica.

(3) **(40 puntos).** Se requiere construir una caja de cartón *de base cuadrada* y <u>**sin**</u> tapa. El fondo cuesta $p = 2$ pesos/m^2 y las paredes solo $q = 1$ peso/m^2. Se requiere que la caja contenga un volumen de $8m^3$. Determine las dimensiones de la caja de costo mínimo. ¿Cuál es el costo de cada caja?

Examen #2 Cálculo Diferencial UAM-A. Viernes 11/Marzo, 2016

(1)(a) La función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{si } 0 < x \leq 3\pi \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es continua

en $[0, 3\pi]$, puesto que $\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Y también es derivable en $(0, 3\pi)$:

$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$, para $x \neq 0$ $\Rightarrow$ satisface las hipótesis del teorema del valor medio.

(b) Entonces, existe $c \in (0, 3\pi)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3\pi) - f(0)}{3\pi - 0} = \frac{0 - 1}{3\pi} = -\frac{1}{3\pi}$$

i.e. tal que

$$f'(c) = -\frac{1}{3\pi}$$

(2) Usando traslaciones de Tutro al Cálculo, si desplazamos $g(x) = \frac{2x}{1+x^2}$, una unidad, 1, hacia arriba, obtenemos $f(x) = \frac{2x}{1+x^2} + 1$. Así, bosquejaremos primero $g(x)$ y después $f(x)$

(i) $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R}$, $\Rightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

<u>$g(x)$ es impar:</u> $g(-x) = \frac{2(-x)}{1+(-x)^2} = -\frac{2x}{1+x^2} = -g(x)$

Por tanto, solo usamos el intervalo $[0, \infty)$ y luego usaremos simetría.

Como $f(x)$ está desplazada, 1 unidad arriba, ya <u>no</u> es <u>impar</u>, ni par.

(b) $\lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x/x^2}{\frac{1}{x^2}+1} =$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2/x}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{0}{0+1} = 0.$$

Entonces $y=0$ es asíntota horizontal de $g(x)$

$y = 1$ es asíntota horizontal de $f(x)$

No hay asíntotas verticales pues $Dom(f) = Dom(g) = \mathbb{R}$

(c) $\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx}$ pues $\frac{d(1)}{dx}=0$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{(1+x^2)2 - 2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2}$$

$\frac{dg}{dx} = \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$ o bien: $\frac{dg}{dx} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

También:

$$\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{(1+x^2)^2(-4x) - 2(1-x^2)2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4}$$

$$= \frac{(-4x)(1+x^2)\left((1+x^2) + 2(1-x^2)\right)}{(1+x^2)^4}$$

$$= -4x(1+x^2)\frac{(1+x^2+2-2x^2)}{(1+x^2)^4} = -4x\frac{(3-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

$\frac{df}{dx} = \frac{dg}{dx} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ (es par)

$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2g}{dx^2} = \frac{(-4x)(3-x^2)}{(1+x^2)^4}$ (es impar (d). No hay puntos frontera

$\mathrm{Dom}\left(\frac{df}{dx}\right) = \mathbb{R}$, entonces $\frac{df}{dx}$ siempre existe

Unicos puntos críticos: $\frac{df}{dx} = 0$ ..

$$\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

(simetría).

estudiar solo en $[0,1)$ y $(1,\infty)$.

$\frac{df}{dx} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$. Denominador $= (1+x^2)^2 > 0$.

Entonces $\frac{df}{dx} = \frac{2}{5^2} > 0 \Rightarrow \boxed{f \nearrow \text{ en } [0,1)}$

$$\frac{df}{dx}(2) = \frac{2(1-2^2)}{(1+2^2)^2} = \frac{-6}{(1+2^2)^2} < 0$$

$\Rightarrow \boxed{f \searrow \text{ en } (1,\infty)}$

(f) Puntos de inflexión Como f'' tiene $\mathrm{Dom}(f'') = \mathbb{R}$, siempre existe. Entonces $f''(x) = 0$ i.e. $\frac{-4x(3-x^2)}{(1+x^2)^4} \Rightarrow$

$\Rightarrow (-4x)(3-x^2) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0,\ x = \pm\sqrt{3}}$ pts de inflexión.

En $x=1$: $f''(1) = \frac{-4(3-1)}{(1+1^2)^4} = \frac{-8}{(1+1^2)^4} < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Cóncava hacia abajo en $(0,\sqrt{3})$.

En $x=2$ $f''(2) = \frac{-4(3-4)}{(1+2^2)^4} = \frac{4}{(1+2^2)^4} > 0$

$\Rightarrow$ Cóncava hacia arriba en $(\sqrt{3},\infty)$

(g) · Como $f \nearrow$ en $(0,1)$ y $f \searrow$ en $(1,\infty)$,

$\Rightarrow$ $f(1)$ es máximo local.

$$f(1) = \frac{2}{1+1} + 1 = \frac{2}{2} + 1 = 2.$$

Y como $f(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \Rightarrow f(1)$ es mínimo global.

Similarmente, $\begin{cases} g \nearrow \text{ en } (0,1) \text{ y } g \searrow \text{ en } (1,\infty) \\ g(1) \text{ es máximo local} \therefore g(1) = 1 \end{cases}$

$g \quad g' \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \Rightarrow g(1)$ es máximo global

Por simetría $g(-1)$ es mínimo local y mínimo global

Así, (-1) es mínimo local y mínimo global

(h) Máximo de g: $(1, g(1)) = (1,1)$.

Puntos de inflexión: $(0, g(0)) = (0,0)$

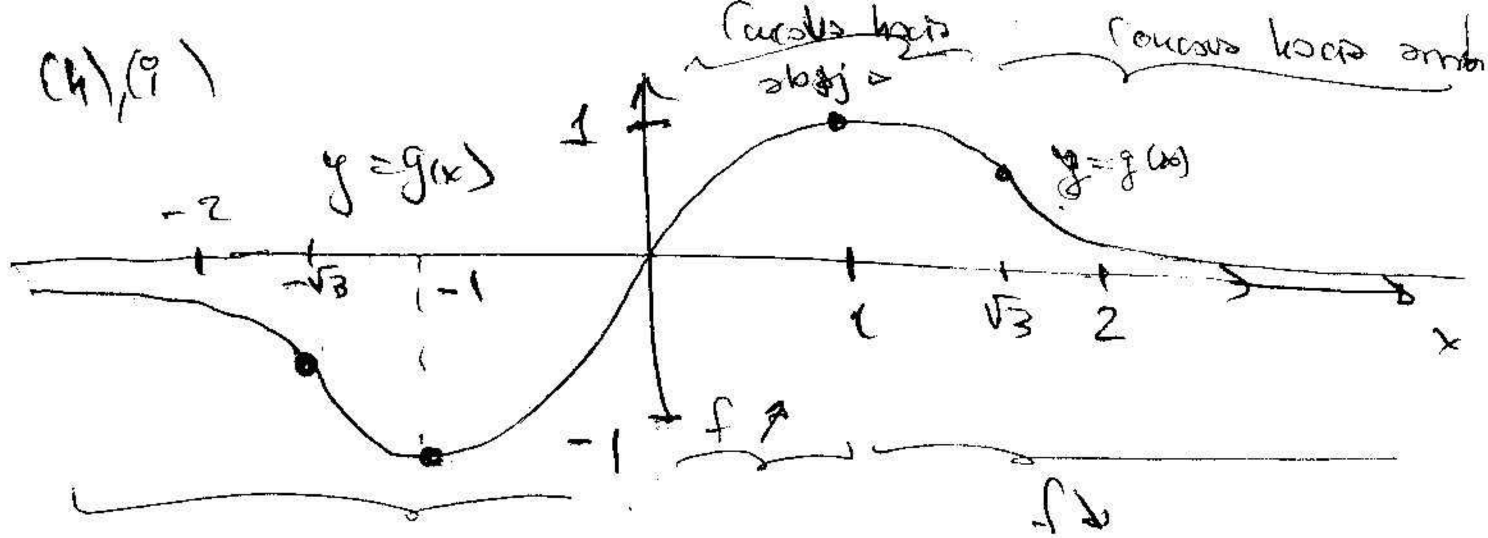
$$\left(\sqrt{3}, g(\sqrt{3})\right) = \left(\sqrt{3}, \frac{2\sqrt{3}}{4}\right)$$

$g(0) = 0.$

$$= \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

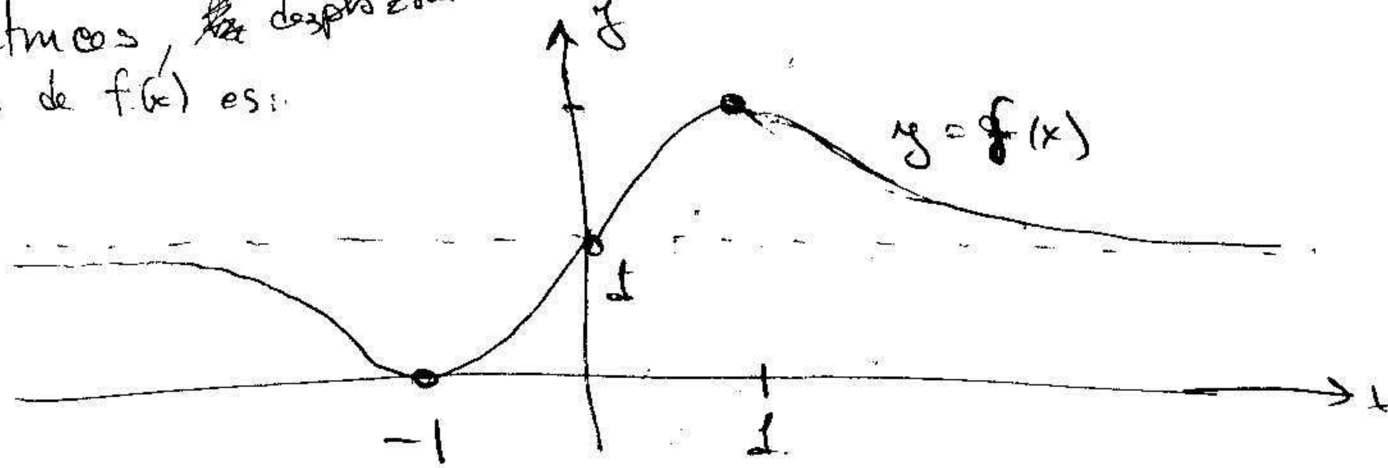
$$\cong (1.7, 0.8)$$

(h), (i)



Por

Entonces, ~~la~~ desplazamos una unidad hacia arriba, y. la gráfica de $f(x)$ es:

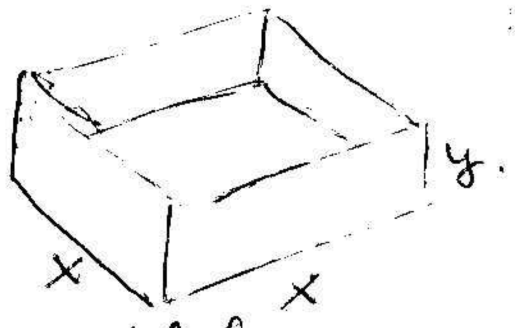


$f(0) = 1$. , $f(-1) = 0$ $f(1) = 2$.

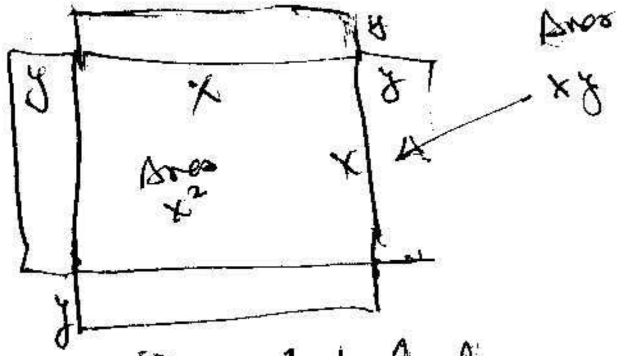
$f(\sqrt{3}) \cong \left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong (1.7, .8)$

$f(-\sqrt{3}) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right) \cong (-1.7, 0.2)$

③ · La caja de cartón de tipo cuadrado, ~~desdoblada~~ desdoblada, se ve así:



Doblada



Desdoblada.

Volumen $V = x^2 y = 8 m^3$

Superficie
$S = 4xy + x^2$.

Del volumen: $y = \frac{V}{x^2}$.

Costo: $C = 4qxy + px^2$

costo paredes (q) costo fondo (p).

Usando el volumen $C(x) = 4qx\left(\frac{V}{x^2}\right) + px^2$

i.e. $C(x) = \frac{4qV}{x} + px^2 \Rightarrow$ Hay que minimizar C(

Dom $(C) = (0, \infty)$.

Puntos críticos Sólo donde $C'(x) = 0$ (pues no hay puntos frontera y $C'(x)$ existe en $(0,\infty)$).

$C'(x) = -\frac{4qV}{x^2} + 2px \Rightarrow -\frac{4qV}{x^2} + 2px = 0$

$\Rightarrow x^3 = \frac{4qV}{2p}$ i.e. $\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{2qV}{p}}}$ (Notar que si cambiamos q, y p, cambia x)

Como $V = 8 m^3$, $p = 2$ pesos$/m^2$; $q = 1$ peso$/m^2$ $\Rightarrow x = \sqrt{\frac{2\cdot 1 \cdot 8}{2}}$

Entonces, $\cancel{x=4}$ $\boxed{x = 2m}$

Así, $y = \frac{V}{x^2} = \frac{8}{2^2} = 2m$ $\boxed{y = 2m}$

Dimensiones $\boxed{2_m \times 2_m \times 2m}$ (Si cambiamos p, q, cambia x, y así cambian las dimensiones

y tiene un costo de $C(2) = \frac{4qV}{x} + p \cdot 2^2$

i.e. $C(2) = \frac{4 \cdot 1 \cdot 8}{2} + 2 \cdot 2^2 = 16 + 8$

$$\boxed{C(2) = 24 \text{ pesos}}$$

(Notar que si cambiamos p, q, tenemos otro coste.

Para verificar que es mínimo, debemos verificar que $C(x) \searrow$ en $(0,2)$ y $C(x) \nearrow$ en $(2,\infty)$

(i) Tomemos $x = 1$ (ie $x \in (0,2)$):

$$C'(1) = -\frac{4qV}{1^2} + 2p \cdot 1 = -\frac{4 \cdot 1 \cdot 8}{1^2} + 2 \cdot 2 \cdot 1$$

$$= -32 + 4 = -28 < 0 \Rightarrow C(x) \searrow$$

$\Rightarrow C(x)$ es decreciente en $(0,2)$

(ii) Tomemos $x = \cancel{4}$ (ie. $x \in (2,\infty)$).

$$C'(3) = -\frac{4qV}{\cancel{4}^2} + 2 \cdot p \cdot \cancel{4} = -\frac{4 \cdot 1 \cdot 8}{4^2} + 2 \cdot 2 \cdot 4$$

$$= -2 + 16 = 14 > 0 \Rightarrow C(x) \nearrow.$$

$\Rightarrow C(x)$ es creciente en $(2,\infty) \Rightarrow$ $\boxed{C(2) \text{ es mínimo global}}$