DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Evaluación global de Cálculo Diferencial (16-I)

Nombre ANSWER KEY. 15:00-18:00 h 12-04-16

Indicaciones generales: El examen global consta de los ejercicios indicados con puntaje. En caso de presentar sólo una parte, resolver todos los ejercicios de dicha parte. **Toda respuesta debe mostrar el procedimiento.**

PRIMERA PARTE

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) **(7.5 puntos)** $f(x) = \left(\frac{2x^3+2\sqrt{x}}{1-x^2}\right)^4$

(b) **(7.5 puntos)** $y = \sqrt[3]{\tan(x^2+x)}$

(c) $g(x) = (\sec(4x) - \cot(2x))^5$

2. **(10 puntos)** Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $x^2\cos^2(y) - \operatorname{sen}(y) = 0$ en el punto $P(0,\pi)$.

3. **(10 puntos)** Un incendio se extiende en forma circular de tal manera que su área aumenta a razón de $30\ \mathrm{m}^3/\mathrm{min}$. Encontrar la rapidez con la que aumenta su radio cuando su diámetro es de 4 m.

SEGUNDA PARTE

1. **(15 puntos)** Considerar la función f, definida por $f(x) = x^4 - 6x^2$.

(a) Obtener el dominio y los ceros o raíces de f.

(b) Determinar los puntos críticos de f y su clasificación.

(c) Determinar los intervalos de monotonía de f.

(d) Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de f.

(e) Con base en la información anterior, bosquejar la gráfica de f.

2. **(10 puntos)** La página de un libro debe tener $100\ \mathrm{cm}^2$ de área. Si cada uno de los cuatro márgenes tiene que ser de 3 cm, determinar las dimensiones de la página (largo y ancho) para que el área impresa sea la mayor posible.

La evaluación global continúa al reverso de esta hoja

TERCERA PARTE

1. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   (a) **(7.5 puntos)** $y = (\arctan(\sqrt{x}))^{x^2+1}$

   (b) **(7.5 puntos)** $f(x) = \ln^3(\arccos(x^2))$

2. **(15 puntos)** Considerar la función G, definida por $G(x) = \frac{e^x}{x}$.

   (a) Obtener el dominio y los ceros o raíces de G. Además, calcular $\lim\limits_{x\to\infty} G(x)$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x)$.

   (b) Determinar los puntos críticos de G y su clasificación.

   (c) Determinar los intervalos de monotonía de G.

   (d) Determinar los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de la gráfica de G.

   (e) Con base en la información anterior, bosquejar la gráfica de G.

3. Para la función $y = f(x) = e^{1+\ln(x-1)}$:

   (a) Determinar algún intervalo en donde exista f^{-1}.

   (b) Calcular el valor de $(f^{-1})'(e)$.

   (c) Obtener una expresión para $f^{-1}(y)$.

4. **(10 puntos)** Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 para $f(x) = \cos(x)$, alrededor de $a = \frac{\pi}{4}$. Con el polinomio anterior, aproximar el valor de $\cos(47^o)$.

Esta evaluación fue elaborada por los profesores M. Salazar A., A. Cueto H. y S. C. Gavito T.

UAM Azcapotzalco.

Cálculo Diferencial. Examen Global 16-I. 12 de abril de 2016.

PRIMERA PARTE. [redacted]

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \left(\dfrac{2x^3+2\sqrt{x}}{1-x^2}\right)^4.$

Regla de la cadena:

$$\frac{df}{dx} = 4\left(\frac{2x^3+2\sqrt{x}}{1-x^2}\right)^3 \frac{d}{dx}\left(\frac{2x^3+2\sqrt{x}}{1-x^2}\right)$$

$$= 4\left(\frac{2x^3+2\sqrt{x}}{1-x^3}\right)\frac{(1-x^2)(2x^3+2\sqrt{x})' - (2x^3+2\sqrt{x})(1-x^2)'}{(1-x^2)^2}$$

Regla del cociente

$$= 4\left(\frac{2x^3+2\sqrt{x}}{1-x^2}\right)\frac{(1-x^2)\left(6x^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - (2x^3+2\sqrt{x})(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$= 4\left(\frac{2x^3+2\sqrt{x}}{1-x^2}\right)\frac{(1-x^2)(6x^2\sqrt{x}+1) + 4x\sqrt{x}(2x^3+2\sqrt{x})}{(1-x^2)^2}$$

(b) $$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\tan(x^2+x)\right)^{-2/3}\frac{d}{dx}\tan(x^2+x)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\tan(x^2+x)\right)^{-2/3}\sec^2(x^2+x)\cdot\frac{d}{dx}(x^2+x)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\tan(x^2+x)\right)^{-2/3}\left(\sec^2(x^2+x)\right)(2x+1)$$

(c) $$\frac{dg}{dx} = 5\left(\sec(4x)-\cot(2x)\right)^4\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos(4x)} - \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}\right)^2$$

$$= 5\left(\sec(4x)-\cot(2x)\right)^4\left[\left(-\frac{(-\sin(4x))}{\cos^2(4x)}\right)\frac{d(4x)}{dx} - \frac{d(2x)}{dx}\frac{\sin(2x)(-\sin(2x)) - \cos(2x)\cos(2x)}{\sin^2 2x}\right]$$

$$= 5\left(\sec(4x)-\cot(2x)\right)^4\left[4\tan 4x\sec 4x + \frac{2}{\sin^2(2x)}\right].$$

(2) $x^2\cos^2 y - \sin y = 0$ holds at $(0,\pi)$: $0^2\cdot(-1)^2 - 0 = 0$ ✓

Implicit differentiation.

$$2x\cos^2 y + x^2\, 2\cos y(-\sin y)\frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\cos^2 y = \left(2x^2\cos y\sin y + \cos y\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x\cos^2 y}{2x^2\cos y\sin y + \cos y}$$

At $(0,\pi)$, the slope of the tangent line: is:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot 0\cdot(-1)^2}{2\cdot 0^2\cdot(-1)(0) + (-1)} = 0.$$

The tangent line:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - \pi = 0\cdot(x-0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = \pi}$$

equation of tangent line.

---

(3) · A is the area of fire.

$$\frac{dA}{dt} = 30\ m^2/\text{min}.$$

Also: $A = \pi r^2$ Since $A = A(t) \Rightarrow r(t)$.

Then: $\dfrac{dA}{dt} = 2\pi r\dfrac{dr}{dt}$ Since $\dfrac{dA}{dt} = 30\ m^2/\text{sec}$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{30\,(m^2/\text{sec})}{2\pi r} \quad \text{If } r = 4m \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{30}{2\pi\cdot 4}\frac{(m^2/\text{sec})}{m}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dr}{dt} = \frac{3.75}{\pi}\ m/\text{sec}} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{dr}{dt} \simeq 1.19\ m/\text{sec}}$$

SEGUNDA PARTE.

(1) $f(x) = x^4 - 6x^2 = x^2(x^2-6)$

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x^2-6) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}\tilde{x}_1 = 0\\ \tilde{x}_2 = \sqrt{6}\\ \tilde{x}_3 = -\sqrt{6}\end{array}}$ Ceros:

(b) No hay puntos frontera

Como es polinomio, la derivada siempre existe:

$$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2-3)$$

The only critical points are those that: $f'(x) = 0$;

$$\Rightarrow 4x(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 0\\ x_2 = \sqrt{3}\\ x_3 = -\sqrt{3}\end{array}$$

Compute 2nd derivative:

$$f''(x) = 12x^2 - 12 \Rightarrow f''(0) = -12 < 0$$
$$= 12(x^2-1) \Rightarrow \boxed{x_1 = 0 \text{ is local max.}}$$

$$f''(\sqrt{3}) = 12(3-1) > 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}x_2 = \sqrt{3}\\ \text{is local min}\end{array}}$$

$$f''(-\sqrt{3}) = 12(3-1) > 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l}x_3 = -\sqrt{3}\\ \text{is local max}\end{array}}$$

(c) We consider the intervals;

$$(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 0), (0, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, \infty)$$

Since f' is continuos, we take arbitrary points in those intervals to describe monotony:

$$f'(-2) = 4(-2)(4-3) < 0 \Rightarrow f \searrow (-\infty, -\sqrt{3})$$
$$f'(-1) = 4(-1)(1-3) > 0 \Rightarrow f \nearrow (-\sqrt{3}, 0)$$

$f'(1) = 4(1)(1-3) < 0 \Rightarrow f \searrow$ on ...

$f'(2) = 4(2)(4-3) > 0 \Rightarrow f \nearrow$ on $(\sqrt{3}, \infty)$

(d) $f''(x) = 12(x^2-1)$. $f''(x)$ always exists.

Then look for inflection points where $f''(x) = 0$.

$$12(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Take the intervals:

$$(-\infty, -1), \; (-1, 1), \; (1, \infty).$$

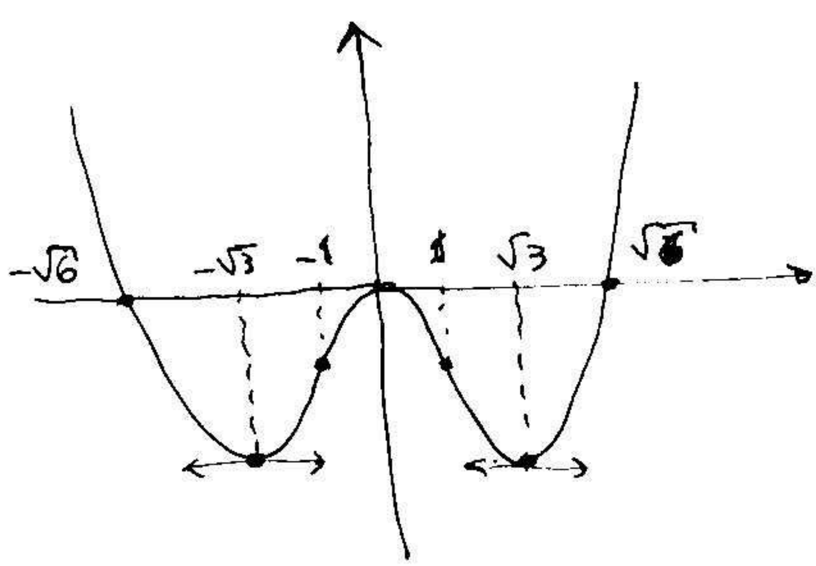
Since f'' is continuous, f'' does not change the sign in those intervals:

$f''(-2) = 12(4-1) > 0 \Rightarrow f$ concave upwards in $(-\infty, -1)$.

$f''(0) = -12 < 0 \Rightarrow f$ concave downwards in $(-1, 1)$.

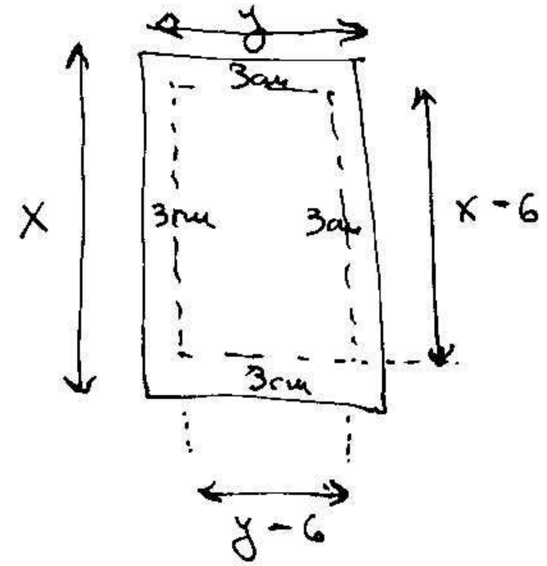
$f''(2) = 12(4-1) > 0 \Rightarrow f$ concave upwards in $(1, \infty)$.

(e)



Then $x = 1$, $x = -1$ are inflection points.

(2) $A = 100\ cm^2$. a = area impresa.



$$a = (x-6)(y-6)$$

Now $A = xy \Rightarrow y = \frac{A}{x}$.

$$\Rightarrow a(x) = (x-6)\left(\frac{A}{x} - 6\right).$$

$\mathrm{Domain}(a) = (0,\infty)$.

$$\Rightarrow a(x) = A - 6x - \frac{6A}{x} + 36.$$

i.e.

$$a(x) = -\frac{6A}{x} - 6x + 36 + A.$$

$$\Rightarrow a'(x) = \frac{6A}{x^2} - 6 \Rightarrow 6\left(\frac{A}{x^2} - 1\right) = 0 \Rightarrow x = \sqrt{A}$$

Since $A = 100\,cm^2 \Rightarrow \boxed{x = 10\ cm}$

And: $y = \frac{A}{x} = \frac{100\,cm^2}{10\,cm} \Rightarrow \boxed{y = 10\ cm}$

TERCERA PARTE.

(1) (a) $y = \left(\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\right)^{x^2+1}$

$$\log y = (x^2+1)\log\left(\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\right)$$

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = 2x\log\left(\mathrm{Arctan}\sqrt{x}\right) + \frac{(x^2+1)}{\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{y'(x) = \left(\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})\right)^{x^2+1}\left[2x\log\left(\mathrm{Arctan}\sqrt{x}\right) + \frac{x^2+1}{2\sqrt{x}(1+x)\,\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})}\right]}$$

(b) $\frac{df(x)}{dx} = 3\,\text{Log}^2(\text{Arc}\cos x^2) \cdot \frac{d}{dx}\text{Log}(\text{Arc}\cos(x^2))$

$$= 3\,\text{Log}^2(\text{Arc}\cos(x^2))\,\frac{1}{\text{Arc}\cos x^2}\,\frac{d}{dx}\text{Arc}\cos(x^2).$$

$$= \frac{3\,\text{Log}^2(\text{Arc}\cos(x^2))}{\text{Arc}\cos(x^2)} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}}\,2x$$

$$\frac{df}{dx} = -\frac{6x\,\text{Log}^2(\text{Arc}\cos(x^2))}{\sqrt{1-x^4}\,\text{Arc}\cos(x^2)}.$$

---

(2) $G(x) = \frac{e^x}{x}.$

(a) $\text{Dom}(G) = \mathbb{R}\setminus\{0\}.$

$G(x) \neq 0$, does not have zeros;

$\frac{e^x}{x} \neq 0$ since $e^x \neq 0$.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x}{} = 1\cdot\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{x} = 1\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$$

$x=0$ is a vertical asymptote.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{(e^x)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1} = \infty.$$

LHôpital

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x} \overset{\downarrow}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{(e^x)}{(x)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{-x}}{1} = 0.$$

(b) Puntos críticos:

$$G'(x) = \frac{xe^x - e^x \cdot 1}{x^2} = \left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^x .$$

$G'(x)$ no existe en $x=0$, pero $x \notin \mathrm{Dom}(G)$. $\Rightarrow$ no es punto crítico

No hay puntos frontera.

Únicos puntos críticos: $G'(x)=0$

$$\left(\frac{x-1}{x^2}\right)e^x = 0$$

Since $e^x \neq 0$, $x \neq 0$ $\Rightarrow$ $(x-1) = 0 \cdot \frac{x^2}{e^x}$

$\Rightarrow$ $x-1=0$ $\Rightarrow \boxed{x=1}$ Único punto crítico.

Also: $G'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)e^x$

$$G''(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' e^x + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)(e^x)'$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)\right]e^x .$$

$$G''(x) = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^x$$

$G''(1) = (2-2+1)e > 0 \Rightarrow$ $\boxed{x=1 \text{ mínimo local}}$

(c) Considerar los subintervalos:

$(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$

$G'(x)$ es continua en esos intervalos, por lo que no cambia de signo

* $G'(-1) = \left(\frac{-1-1}{(-1)^2}\right)e^{-1} = -2e^{-1} < 0$

$\Rightarrow G \downarrow$ in $(-\infty, 0)$

* $G'(1/2) = \left(\frac{\frac{1}{2}-1}{(\frac{1}{2})^2}\right)e^{1/2} = 4\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)e^{1/2} < 0$

$\Rightarrow G \searrow$ on $(0,1)$

* $G'(2) = \left(\frac{2-1}{2^2}\right)e^2 = \frac{1}{4}e^2 > 0$

$\Rightarrow G \nearrow$ on $(1,\infty)$.

(d) <u>Concavidad</u> $G''(x) = \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}\right)e^x$

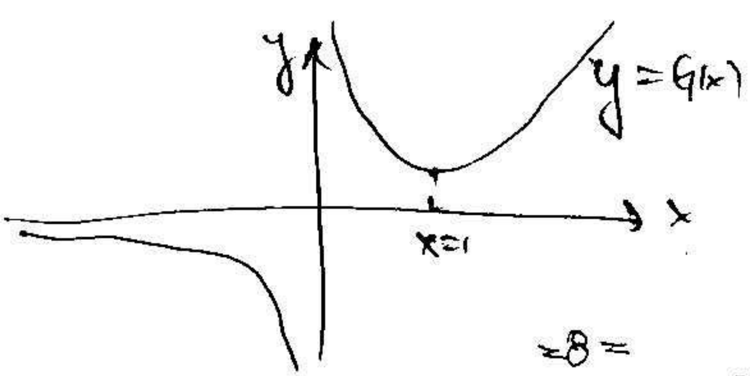
i.e. $G''(x) = \left(\frac{2-2x+x^2}{x^3}\right)e^x$

i.e. $G''(x) = \left(\frac{(x-1)^2+1}{x^3}\right)e^x$

Numerator is always >0. Then if denominator $<0 \Rightarrow G''<0$.
if denominator $>0 \Rightarrow G''>0$

So, $x<0 \Rightarrow$ denominator $= x^3 < 0 \Rightarrow G''<0 \Rightarrow$ downwards concave.

$x>0 \Rightarrow$ denominator $= x^3 > 0 \Rightarrow G''>0 \Rightarrow$ upwards concave.



③ (a) $$f'(x) = e^{(1+\ln(x-1))} \cdot \frac{d}{dx}(1+\ln(x-1))$$

$$= \frac{e^{1+\ln(x-1)}}{x-1}$$

$f' > 0$ if $x > 1 \Rightarrow f \nearrow$.

($f' < 0$ if $x < 1 \Rightarrow f \searrow$

It does not make sense since $\mathrm{Dom}(f) = (1,\infty)$

since $\mathrm{Dom}(\ln(x-1)) = (1,\infty)$).

(b). $$(f^{-1})'(e) = \frac{1}{\left(\frac{df}{dy}\right)\Big|_{y=f^{-1}(e)}}$$

$y = f^{-1}(e) \Rightarrow f(y) = e$

$e^{1+\ln(y-1)} = e \Rightarrow e^{\ln(y-1)} = 1.$

$\Rightarrow \ln(y-1) = 0$

$\Rightarrow y-1 = 1$

$\Rightarrow y = 2$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(e) = \frac{1}{\frac{df}{dy}\Big|_{y=2}} = \frac{y-1}{e^{1+\ln(y-1)}}\Bigg|_{y=2}$$

$$= \frac{2-1}{e^{1+\ln(2-1)}} = \frac{1}{e}$$

(c) $x = e^{1+\ln(y-1)}$

$\ln x = 1 + \ln(y-1)$

$\ln x - 1 = \ln(y-1)$

$e^{\ln x - 1} = y - 1$ $\Rightarrow y =$

$$\boxed{y = f^{-1}(x) = e^{\ln x - 1} + 1}$$

Remark ①

$$\frac{df^{-1}}{dx} = e^{(\ln x - 1)} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x - 1) + 0$$

$$= \frac{e^{(\ln x - 1)}}{x}$$

$$\frac{df^{-1}}{dx}(e) = \frac{e^{(\ln e - 1)}}{e} = \frac{e^{1-1}}{e} = \frac{e^0}{e} = \frac{1}{e} \checkmark$$

It coincides.

Remark ②

Notice that $Dom(f) = (1, \infty)$.

Now $f(x) = e^{1+\ln(x-1)} = e\, e^{\ln(x-1)} = e(x-1)$

$\Rightarrow \boxed{y = e(x-1)}$ is a straight line with slope $m = e$, and passes through $(1,0)$.

Compute $f^{-1}(x)$:

$$x = e(y-1) \Rightarrow \frac{x}{e} = y - 1$$

$$\frac{x}{e} + 1 = y$$

$$\Rightarrow \boxed{f^{-1}(x) = \frac{x}{e} + 1}$$

$$\boxed{\frac{df^{-1}}{dx} = \frac{1}{e}}$$

④ $f(x) = \cos x$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

We require: $f'(x) = -\sin x$ $\qquad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f''(x) = -\cos x$ $\qquad f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f'''(x) = \sin x$ $\qquad f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Taylor polynomial of degree 3, about $x=a$,

$$P_3(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f'''(a)(x-a)^3$$

Hence:

$$\boxed{P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3}$$

or $$\boxed{P_3(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \left(x-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3\right)}$$

Since $180^\circ \longleftrightarrow \pi$. $\qquad$ then $x = 47^\circ = 45^\circ + 2^\circ$

$2^\circ = \frac{180^\circ}{90} \longleftrightarrow \frac{\pi}{90}$ $\qquad$ i.e. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90}$

$$P_3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{90}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{90} - \frac{\pi^2}{2(90^2)} + \frac{\pi^3}{6(90^3)}\right)$$

$$\simeq 0.\underbrace{681998}3166\,2718.$$

↑ Calculator

Remark:

$\cos(47^\circ) \simeq 0.\underbrace{6819983}60062499.$ Quite well!.

↑ Calculator.