DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EVALUACIÓN DE RECUPERACIÓN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Trimestre: 16I.-. Fecha: 28-04-16.-. Horario: 15:00-18:00 hr.-. Grupo:______

Alumno: ANSWER KEY. **Matrícula:____________**

NOTA: Todos los resultados deben mostrar el procedimiento.

1. (10%) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \left(\dfrac{x^4 - 81}{x^2 - 9}\right)^4$ (b) $g(x) = \operatorname{sen}^2(\tan \sqrt[3]{x})$

2. (10%) Obtener las ecuaciones de la rectas tangente y normal a la curva

$\cos y = xy$ en el punto $P(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \frac{\pi}{4})$

3. (10%) Una escalera de 3 m de longitud está apoyada contra una pared perpendicular al piso. Si el extremo superior de la escalera desciende a razón de 0.1 m/seg cuando está a 2 m del piso, ¿a qué rapidez se está resbalando en el piso el extremo inferior?

4. (15%) Para la función $F(x) = 3x^5 - 5x^3$ determinar: (a) dominio y raíces; (b) intervalos de monotonía; (c) máximos y mínimos locales; (d) intervalos de concavidad y puntos de inflexión. Con los elementos obtenidos bosquejar la gráfica de F.

5. (10%) Una industria requiere construir latas cilíndricas. Elaborar el fondo tiene un costo de \$2 cada cm^2, la tapa \$4 por cm^2 y las paredes \$1 cada cm^2. Se requiere que la lata contenga un volumen de un litro (1 dm^3=1000 cm^3). Determine las dimensiones de la lata con costo mínimo. ¿Cuál es el costo de cada lata?

6. (15%) Calcular la derivada de las siguientes funciones:

(a) $y = (\arctan x^3)^{x^3}$ (b) $w = \tan[\ln(1 + x^2)]$

7. (15%) Para la función $G(x) = x \ln x$ determinar: (a) dominio y raíces; (b) asíntotas verticales y horizontales; (c) intervalos de monotonía; (d) máximos y mínimos locales; (e) intervalos de concavidad y puntos de inflexión. Con los elementos obtenidos bosquejar la gráfica de G.

8. (5%) Calcular el límite siguiente: $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x \tan x}\right)$

9. (10%) Obtener el polinomio de Taylor de orden 3 para $f(x) = \sqrt[3]{x}$ alrededor de $a = 27$. Con el polinomio anterior, aproximar el valor de $\sqrt[3]{26}$

Examen de Recuperación Invierno 2016. 16-I. 28 Abril 2016

UAM-Azcapotzalco Cálculo Diferencial Vespertino

(1) (a) Notar que: $\frac{x^4-81}{x^2-9} = \frac{(x^2-9)(x^2+9)}{(x^2-9)} =$

$= (x^2+9)$. Así $f(x) = (x^2+9)^4$. Entonces.

$$\frac{df}{dx} = 4(x^2+9)^3 \cdot (2x) = 8x(x^2+9)^3.$$

Similarmente.

$$\frac{df}{dx} = 4\left(\frac{x^4-81}{x^2-9}\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x^4-81}{x^2-9}\right) = 4\left(\frac{x^4-81}{x^2-9}\right)^3 \frac{(x^2-9)4x^3-(x^4-81)2x}{(x^2-9)^2}$$

$$= 4\left(\frac{x^4-81}{x^2-9}\right)^3 \frac{4x^5-36x^3-2x^5+162x}{(x^2-9)^2} =$$

$$= 4\left(\frac{x^4-81}{x^2-9}\right)^3 \frac{2x^5-36x^3+162x}{(x^2-9)^2} =$$

$$= 4\left(\frac{x^4-81}{x^2-9}\right)^3 \frac{2x(x^4-18x^2+81)}{(x^2-9)^2}$$

$$= 8x\frac{(x^4-81)^3}{(x^2-9)^3} \cdot \frac{(x^2-9)^2}{(x^2-9)^2}$$

$$= 8x\frac{(x^4-81)^3}{(x^2-9)^3} \cdot 1 = 8x\frac{(x^2-9)^3(x^2+9)^3}{(x^2-9)^3}$$

$\boxed{\frac{df}{dx} = 8x(x^2+9).}$ Mismo resultado.

1(b). $\frac{d}{dx} g = \frac{d}{dx}\sin^2(\tan(\sqrt[3]{x})) = 2\sin(\tan(\sqrt[3]{x})) \cdot \frac{d}{dx}\tan(\sqrt[3]{x})$

$$= 2\sin(\tan\sqrt[3]{x})\left(1+\tan^2(\sqrt[3]{x})\right) \cdot \frac{d}{dx}\sqrt[3]{x}$$

i.e. $\boxed{\frac{dg}{dx} = 2\sin(\tan(\sqrt[3]{x}))\left(1+\tan^2\sqrt[3]{x}\right)\frac{1}{3x^{2/3}}}$

(2) Curva: $\cos y = xy$. Pasa por $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$xy = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Diferenciación implícita:

$$-\sin y \frac{dy}{dx} = 1 \cdot y + x \frac{dy}{dx}$$

i.e. $$-(x + \sin y)\frac{dy}{dx} = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + \sin y}.$$

Evaluando en $\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}, \frac{\pi}{4}\right)$:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{-\pi/4}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \sin\frac{\pi}{4}} = \frac{-\pi/4}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4\pi}{4\pi} \cdot \frac{-\pi/4}{\frac{2\sqrt{2}}{\pi} + \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{-\pi^2}{8\sqrt{2} + 2\pi\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi^2}{8+2\pi}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\pi^2}{4+\pi}\right)$$

es la pendiente de la recta tangente:

$$y - \frac{\pi}{4} = m\left(x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right) = -\frac{\pi^2}{2\sqrt{2}(4+\pi)}\left(x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right).$$

$$= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}(4+\pi)} x + \frac{\pi}{4+\pi}.$$

i.e. $$y = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}(4+\pi)} x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4+\pi}$$

$$\boxed{y = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{(4+\pi)} x + \frac{\pi^2 + 8\pi}{4(4+\pi)}}$$

La pendiente de la recta perpendicular es:

$$m_{perp} = \frac{-1}{m} = 2\sqrt{2}\left(\frac{4+\pi}{\pi^2}\right)$$

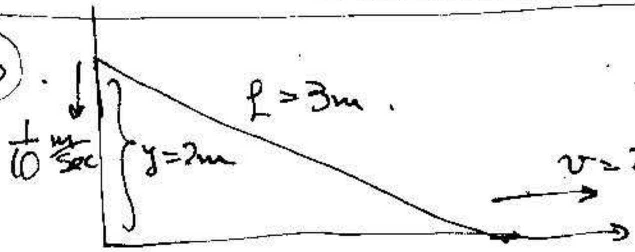
$$\Rightarrow y - \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2}\left(\frac{4+\pi}{\pi^2}\right)\left(x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\right)$$

i.e. $y = 2\sqrt{2}\left(\frac{4+\pi}{\pi^2}\right)x + \frac{\pi}{4} - \frac{8}{\pi}\left(\frac{4+\pi}{\pi^2}\right)$

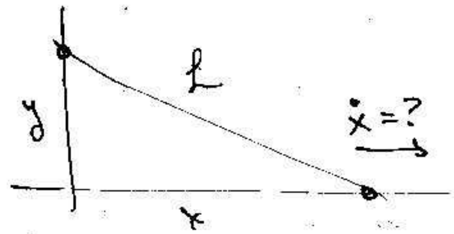
$$\boxed{y = 2\sqrt{2}\left(\frac{4+\pi}{4}\right)x + \frac{\pi^4 - 32(4+\pi)}{4\pi^3}}$$

---

(3).



Notemos



$$x^2+y^2=\ell^2$$

$$\Rightarrow \quad 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \dot{x} = -\frac{y\dot{y}}{x}.$$

Si $y = 2m \Rightarrow x = \sqrt{\ell^2 - y^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Así $\dot{x} = -\frac{(2)(-1/10)}{\sqrt{5}} = \boxed{+\frac{1}{5\sqrt{5}}\ m/sec.} = \text{velocidad}$

---

(4) $F(x) = 3x^5 - 5x^3$

(a) $\boxed{Dom(F) = \mathbb{R}.}$

Raíces: $3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2-5) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 0 \text{ (triple)} \\ x_2 = \sqrt{\frac{5}{3}} \\ x_3 = -\sqrt{\frac{5}{3}} \end{array}}$

(b) Monotonía:

$$F'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2-1) = 15x^2(x-1)(x+1)$$

Puntos críticos $x=0,\ x=-1,\ x=+1$

$F'(-2) = 15\cdot 2^2(4-1) = 60\cdot 3 > 0$. F creciente en $(-\infty,-1)$

$F'(-\frac{1}{2}) = 15\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{15}{4}\cdot\frac{3}{4} < 0$. $\Big\}$ F decreciente en $(-1,1)$

$F'(\frac{1}{2}) = 15\,\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right) = -\frac{15}{4}\,3/4 < 0$

$F'(2) = 15\cdot 2^2(4-1) > 0$. F creciente en $(1,\infty)$

Notar que $F(-x) = -F(x) \Rightarrow F$ impar.

(c) Así, mínimo local en $x = 1$. $\underline{F(1) = 3-5 = -2}$

máximo local en $x = -1$: $F(-1) = -3+5 = 2$.

Tangencia horizontal en $x=-1$, $x=0$, $x=1$.

(d) Concavidad: $F''(x) = 15\frac{d}{dx}(x^4 - x^2) = 15(4x^3 - 2x)$

$$= 2\cdot 15x(2x^2 - 1)$$

Considerar solo $[0, \infty)$ por simetría,

$F''(x) = 0$ en $x = 0$ y $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$.

$$\left.\begin{aligned} F''\left(\tfrac{1}{2}\right) &= 2\cdot 15\cdot \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{2}{4} - 1\right) < 0 \\ &= 15\left(\tfrac{1}{2} - 1\right) = -\tfrac{15}{2} < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Cóncava hacia abajo en } \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

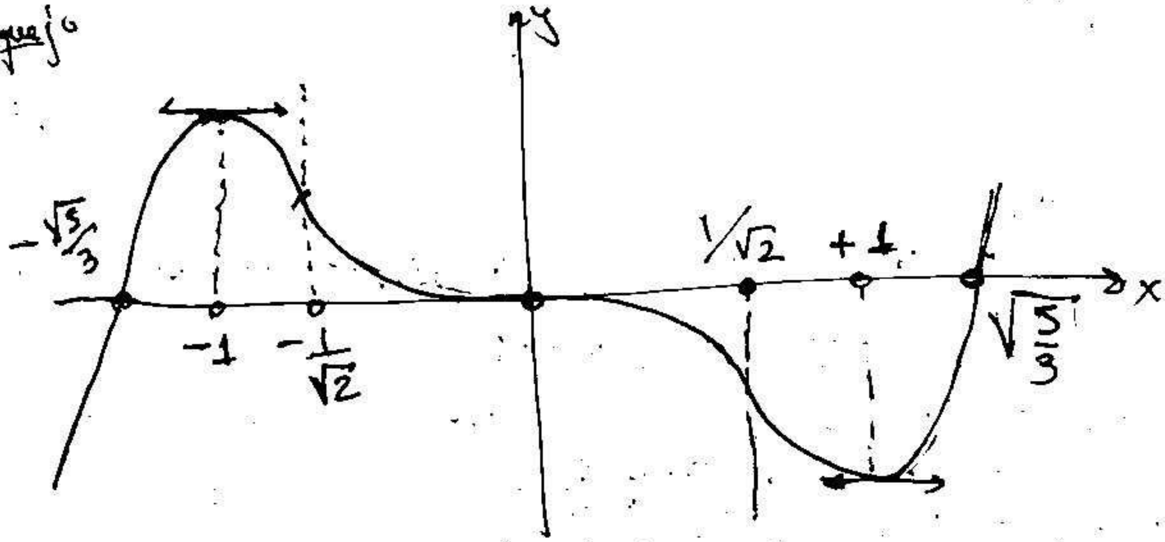
$$\left.\begin{aligned} F''(1) &= 2\cdot 15\cdot 1\,(2-1) > 0 \\ &= 30 > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{Cóncava hacia arriba en } \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \infty\right)$$

Por simetría:

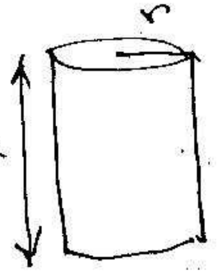
F cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

F cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$

Bosquejo



⑤ Costo mínimo.

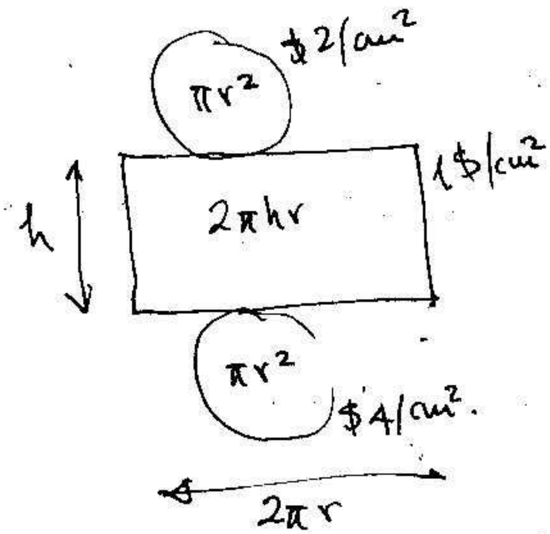


$V_0 = \pi r^2 h$

$V_0 = 1000\ cm^3$.

Así: $h = \dfrac{V_0}{\pi r^2}$.

Área desplegada:



Costo: $2(\pi r^2) + 4(\pi r^2) + 1\cdot(2\pi h r)$

i.e. $C = 6\pi r^2 + 2\pi h r$

i.e. $C(r) = 6\pi r^2 + 2\pi \dfrac{V_0}{r^2} r$

Minimizar $\boxed{C(r) = 6\pi r^2 + 2\pi \dfrac{V_0}{r}}$

$Dom(C) = (0, \infty)$.

Puntos críticos: $C'(r) = 12\pi r - \dfrac{2\pi V_0}{r^2} = 0 \Rightarrow r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{V_0}{6}}$

$6r - \dfrac{V_0}{r^2} = 0 \quad r^3 = \dfrac{V_0}{6}$ único punto crítico.

$r_0 = \sqrt[3]{\dfrac{1000}{6}} = \dfrac{10}{\sqrt[3]{6}}\ cm \cong 5.5\ cm$.

⊛ $C'(1) = 12\pi - 2\pi\cdot 1000 < 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{C \text{ decreciente } (0, r_0)}$

⊛ $C'(10) = 12\pi\cdot 10 - \dfrac{2\pi\, 1000}{10^2} = 120\pi - \dfrac{2000}{100}\pi$

$= 120\pi - 20\pi > 0$

$\Rightarrow \boxed{C \text{ creciente en } (r_0, 0)}$

$C(r_0)$ es el costo mínimo: $C\left(\dfrac{10}{\sqrt[3]{6}}\right) = 6\pi \dfrac{100}{6^{2/3}} + 2\pi\cdot\dfrac{1000}{10}\cdot\sqrt[3]{6}$

$= \sqrt[3]{6}\,\pi\, 100 + 200\pi\sqrt[3]{6} = \sqrt[3]{6}\,(300\pi) \simeq \boxed{1{,}700\ \$}$ costo mínimo

$h = \dfrac{1000}{\pi\, 100}\cdot(6)^{2/3} = 10\dfrac{(6)^{2/3}}{\pi}$ Dimensiones $= S =$ $\boxed{r_0 \cong 5.5\ cm}$ $\boxed{h \approx 10.5\ cm}$.

⑥ (a) $\ln y = x^3 \ln(\text{Arctan}\, x^3)$

Así $\quad (\ln y)' = (x^3 \ln(\text{Arctan}\, x^3))'$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\text{Arctan}\, x^3) + x^3 (\ln \text{Arctan}\, x^3)'$$

$$= 3x^2 \ln(\text{Arctan}\, x^3) + \frac{x^3}{\text{Arctan}(x^3)} \cdot (\text{Arctan}\, x^3)'$$

i.e.

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln(\text{Arctan}\, x^3) + \frac{x^3}{\text{Arctan}(x^3)} \cdot \frac{1}{1+x^6} 3x^2.$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = (\text{Arctan}\, x^3)^{x^3} \left[3x^2 \ln(\text{Arctan}\, x^3) + \frac{3x^5}{(1+x^6)\,\text{Arctan}(x^3)} \right]}$$

(b) $\frac{dw}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tan(\ln(1+x^2)) \right) = \left(1 + \tan^2(\ln(1+x^2))\right) \cdot \frac{d}{dx} \ln(1+x^2)$

i.e. $\quad \boxed{\frac{dw}{dx} = \left(1 + \tan^2(\ln(1+x^2))\right) \frac{2x}{1+x^2}}$

(7) · $G(x) = x \ln x$.

(a) $\boxed{\text{Dom}(G) = (0, \infty)}$ Raíces: $G(x) = 0$

$x \ln x = 0$.

Como $x > 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

única raíz.

(b) ¿Asíntota vertical en $x = 0$?

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \text{“}\frac{-\infty}{\infty}\text{”}.$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-x^{-2}} \text{, by L'Hôpital.}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$$ No hay asíntota vertical

(c) $G'(x) = x' \ln x + x(\ln x)' = \ln x + \frac{x}{x} =$

$= 1 + \ln x$.

Puntos críticos: $G'(x)$ existe siempre en $(0, \infty)$.

Así $G'(x) = 0 \quad 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \boxed{x_0 = e^{-1}}$

Tomo $e^{-2} < e^{-1} = x_0$.

$$\begin{cases} G'(e^{-2}) = 1 + \ln e^{-2} = 1 - 2\ln e = 1 - 2 = -1 \\ G'(e^{-2}) < 0. \end{cases}$$

Tomo $x_0 = e^{-1} < e$.

$$\begin{cases} G'(e) = 1 + \ln e = 1 + 1 = 2 \\ G'(e) > 0 \end{cases}$$

Así G decreciente en $(0, e^{-1})$

G creciente en (e^{-1}, ∞)

(7) =

Mínimo local en $x_0 = e^{-1}$

$$\text{Min loc} = G(e^{-1}) = e^{-1}\ln e^{-1} = \boxed{-e^{-1}}$$

(e) Concavidad

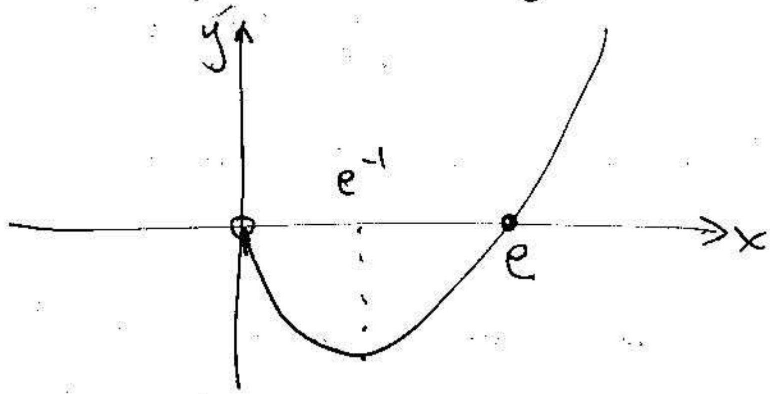
$$G''(x) = \frac{1}{x} \quad \text{Como } x>0 \Rightarrow G''(x)>0$$

(cóncava hacia arriba)

No hay puntos de inflexión.

Bosquejo: Notar que $G'(x) = 1+\ln x \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$

Tangente vertical casi en $x=0$



(8) Como $x - \sin x = 0$ y $x\tan x = 0$ en $x=0$,

Usar L'Hôpital.

$$\lim_{x\to} \frac{x-\sin x}{x\tan x} = \lim_{x\to} \frac{1-\cos x}{\tan x + x(1+\tan^2 x)}$$

Como: $1-\cos x = 0$ y $\tan x + x(1+\tan^2 x) = 0$ en $x=0$

Usar L'Hôpital nuevamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\tan x + x(1+\tan^2 x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2(1+\tan^2 x) + 2x\tan x\sec^2 x} = \frac{0}{2}$$

Entonces. $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x\tan x} = 0}$

⑨. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f'(x) = \frac{1}{3} x^{-2/3}$

$f''(x) = -\frac{2}{3^2} x^{-5/3}$

$f'''(x) = \frac{10}{3^3} x^{-8/3}$.

$f(27) = 3$

$f'(27) = \frac{1}{3} \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{3^2} = \frac{1}{27}$

$f''(27) = -\frac{2}{3^2} \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^5} = -\frac{2}{3^2} \frac{1}{3^5}$

$= -\frac{2}{3^7} = \frac{-2}{2187}$

$f'''(x) = \frac{10}{3^3} \frac{1}{(\sqrt[3]{27})^8} = \frac{10}{3^3 \cdot 3^8}$

$= \frac{10}{}$

Así:

$$\boxed{P(x) = f(27) + f'(27)(x-27) + \frac{f''(27)}{2!}(x-27)^2 + \frac{f'''(27)}{3!}(x-27)^3}$$

$$\boxed{P(x) = 3 + \frac{1}{27}(x-27) - \frac{2}{2(2187)}(x-27)^2 + \frac{10}{6(177,147)}(x-27)^3}$$

Evaluando en $x = 26$

$P(26) = 3 - \frac{1}{27} - \frac{1}{2187} - \frac{10}{6(177,147)}$

$\cong 2.\underbrace{962496}30\ldots$

Calculadora. $\sqrt[3]{26} \cong 2.\underbrace{96249}6068407371$