Cálculo Diferencial

Solución del examen de recuperación, turno matutino

Trimestre 16-I.

1. (a) $f'(x) = 4\left(\frac{3x^2-5}{3x^2+5}\right)^3 \frac{6x(3x^2+5)-6x(3x^2-5)}{(3x^2+5)^2} = \left(\frac{3x^2-5}{3x^2+5}\right)^3 \frac{240x}{(3x^2+5)^2}$
$= \frac{240x(3x^2-5)^3}{(3x^2+5)^5}$.

   (b) $g'(x) = 3\operatorname{sen}^2(\cos x^2)(-\operatorname{sen} x^2)2x = -6x \operatorname{sen} x^2 \operatorname{sen}^2(\cos x^2)$.

2. $2e^{xy} - 1 = x^2 + y^2$.

   $2e^{xy}(xy)' = 2x + 2yy'$.

   $2e^{xy}(xy' + y) = 2x + 2yy'$.

   $y'(2xe^{xy} - 2y) = 2x - 2ye^{xy}$.

   $y' = \frac{2x - 2ye^{xy}}{2xe^{xy} - 2y}$.

   $y'(0,1) = \frac{0 - 2e^0}{0 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1$.

   Recta tangente:

   $y - 1 = 1(x - 0)$.

   $y = x + 1$.

   Recta normal:

   $y - 1 = -1(x - 0)$.

   $y = -x + 1$.

3. Si x es la distancia del muro a la base de la escalera y y la altura de la parte de la escalera que está apoyada contra el muro:

   $x^2 + y^2 = 10^2 = 100$.

   Si $y = 8$, $x = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6m$.

   Derivando:

   $2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$.

   $2(6)(0.5) + 2(8)\frac{dy}{dt} = 0$.

   $\frac{dy}{dt} = \frac{-6}{16} = -\frac{3}{8}\frac{m}{min}$.

4. $F(x) = (x^2-4)^2$.

$F'(x) = 2(x^2-4)(2x) = 4x^3 - 16x$.

$F''(x) = 12x^2 - 16 = 4(3x^2-4)$.

$F(x) = 0$ en $x = \pm 2$.

$F'(x) = 0$ en $x = 0$, $x = \pm 2$.

$F''(x) = 0$ en $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

		-2		$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		0		$\frac{2}{\sqrt{3}}$		2	
$F(x)$	$+$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$+$
$F'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$F''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$

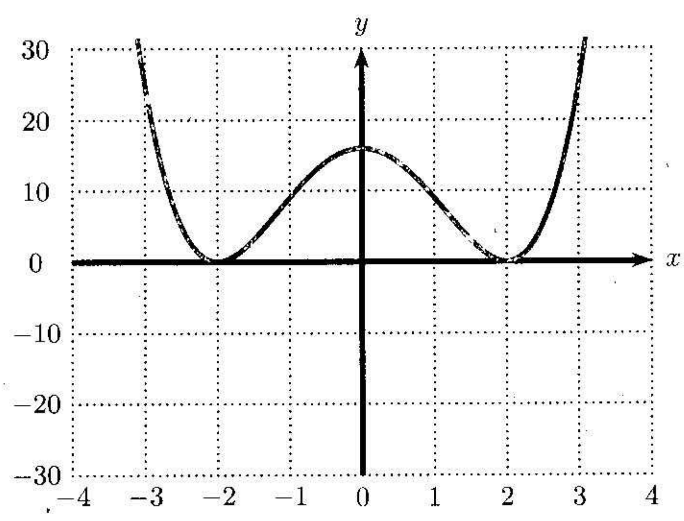
(a) $\mathrm{Dom}_f = \mathbb{R}$.
Raíces: $x = -2$ y $x = 2$.

(b) La función es creciente en $(-2, 0)$ y en $(2, \infty)$ y es decreciente en $(-\infty, -2)$ y en $(0, 2)$.

(c) Máximo locales en $x = 0$.
Mínimos locales en $x = 2$ y $x = -2$.

(d) La función es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ y en $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Puntos de inflexión: $x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.



5. Si x es la longitud del lado que tiene la parte de metal, y la longitud de los lados perpendiculares a éste y c el costo de la cerca:

$$c = x(200) + x(100) + 2y(100) = 300x + 200y.$$

Como el área es de $10\,m^2$, $xy = 10$, de donde $x = \frac{10}{y}$.

$$c = 300\left(\frac{10}{y}\right) + 200y = \frac{3000}{y} + 200y.$$

La variable y puede tomar valores en $(0, \infty)$.

$$c' = -\frac{3000}{y^2} + 200 = 0.$$

$$200y^2 = 3000.$$
$$y^2 = 15.$$
$$y = \pm\sqrt{15}.$$

Como y no puede ser negativo, $y = \sqrt{15}$, en este caso, $x = \frac{10}{\sqrt{15}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}$.

$$c'' = \frac{6000}{y^3}.$$

Para cualquier valor de $y > 0$, c'' es positiva, por lo que $y = \sqrt{15}$ es un mínimo global.

6. (a) $y = (x^2+1)^{\arctan x}$.
   $\ln(y) = \arctan x \ln(x^2+1)$.
   $\frac{1}{y}y' = \frac{1}{1+x^2}\ln(x^2+1) + \arctan x \frac{1}{1+(x^2+1)^2}2x$.
   $y' = (x^2+1)^{\arctan x}\left[\frac{\ln(x^2+1)}{1+x^2} + \frac{2x\arctan x}{1+(x^2+1)^2}\right]$.

   (b) $w' = \frac{1}{1+\tan^2 x}(2\tan x \sec^2 x)$.

7. $G(x) = xe^x$.

$G'(x) = xe^x + e^x = (x+1)e^x$.

$G''(x) = (x+1)e^x + e^x = (x+2)e^x$.

$G(x) = 0$ en $x = 0$.

$G'(x) = 0$ en $x = -1$.

$G''(x) = 0$ en $x = -2$.

		-2		-1		0	
$F(x)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$F'(x)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$F''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$

(a) $\mathrm{Dom}_f = \mathbb{R}$.
Raíces: $x = 0$.

(b) No hay asíntotas verticales.

$\lim_{x\to+\infty} (xe^x) = \infty \times \infty = \infty$.

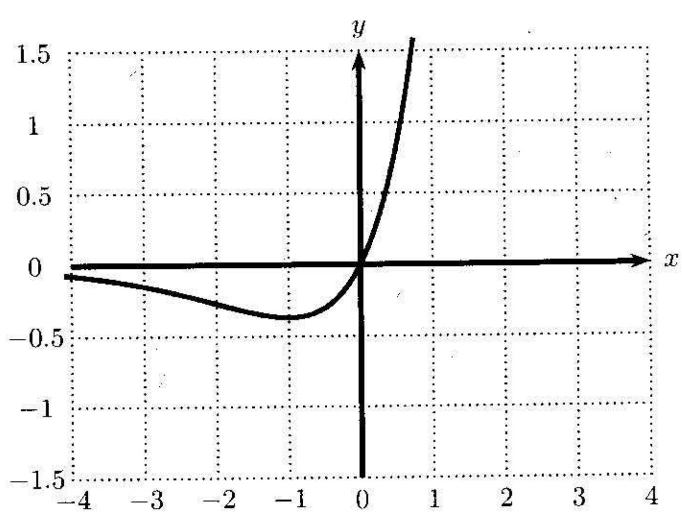
$\lim_{x\to-\infty} (xe^x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} -e^x = 0$.

Hay una asíntota horizontal en $y = 0$ cunado $x \to -\infty$.

(c) La función es creciente en $(-1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -1)$.

(d) Mínimo local en $x = -1$.

(e) La función es cóncava hacia arriba en $(-2, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2)$.
Punto de inflexión: $x = 2$.



8. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2e^{-x}) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x} = 0.$

9. $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$. $\quad f(9) = 3.$

$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$. $\quad f'(9) = \frac{1}{2}3^{-1} = \frac{1}{6}.$

$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$. $\quad f''(9) = -\frac{1}{4}(3)^{-3} = -\frac{1}{108}.$

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. $\quad f'''(9) = \frac{3}{8}(3)^{-5} = \frac{1}{8(3)^4} = \frac{1}{648}.$

El polinomio de Taylor grado 3 es:

$$P(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9) - \frac{1}{216}(x-9)^2 + \frac{1}{3888}(x-9)^3.$$

$$P(10) = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{216} + \frac{1}{3888} = \frac{12331}{3888}.$$