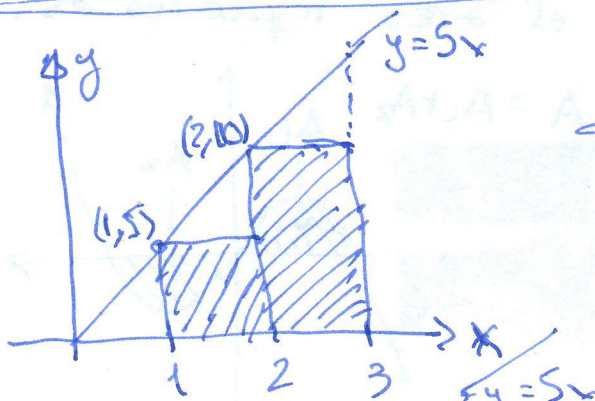


Examen #1

Soluciones KEY

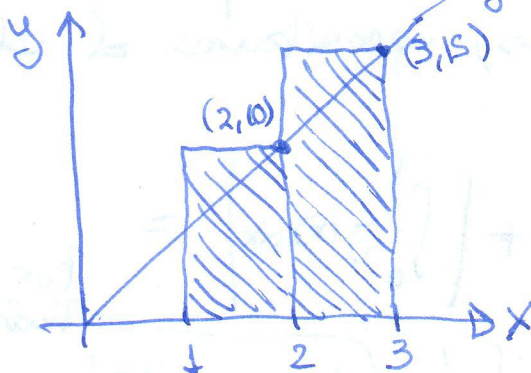
1(a)



$$\Delta x = \frac{b-a}{2} = \frac{3-1}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Suma inferior} &= \Delta x f(1) + \Delta x f(2) \\ &= 1 \cdot 5 + 1 \cdot 10 = 15 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Suma inferior} = 15}$$



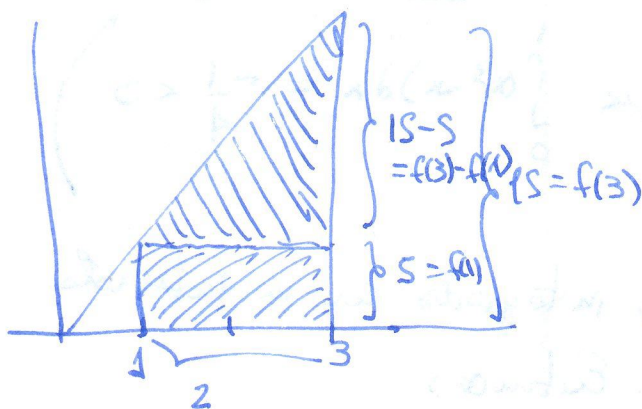
$$\begin{aligned} \text{Suma superior} &= \Delta x f(2) + \Delta x f(3) \\ &= 1 \cdot 10 + 1 \cdot 15 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Suma superior} = 25}$$

(b)

$$\int_1^3 f(x) dx = \text{Area} \left(\begin{array}{c} \text{Graph of } y=5x \text{ from } x=1 \text{ to } x=3 \end{array} \right)$$

$$= \text{Area} \left(\begin{array}{c} \text{Rectangle of width 2 and height 5} \end{array} \right) + \text{Area} \left(\begin{array}{c} \text{Triangle with base 2 and height 10} \end{array} \right)$$



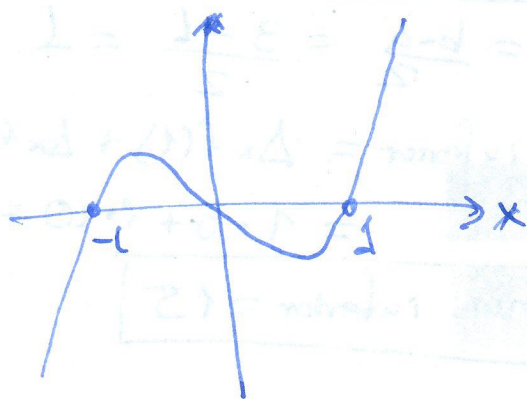
$$= 2 \cdot 5 + \frac{2 \cdot 10}{2} = 10 + 10$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^3 f(x) dx = 20}$$

Compare:

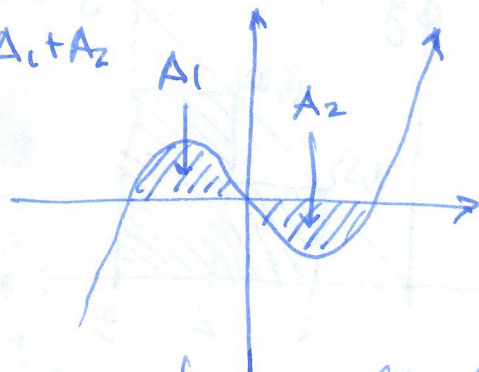
$$\text{Suma inferior} = 15 \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 25 = \text{Superior sum.} \quad \text{as expected.}$$

② (a) La gráfica de $g(x) = x^3 - x^{\frac{3}{2}}$ es:



y el área requerida es:

$$A = A_1 + A_2$$



Pero no hay áreas negativas, necesitamos el valor absoluto de los integrales:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 = \left| \int_{-1}^0 g(x) dx \right| + \left| \int_0^1 g(x) dx \right| = \text{Por el Teorema Fundamental Cálculo} \\ &= \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx \right| + \left| \int_0^1 (x^3 - x) dx \right| = \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-1}^0 \right| + \left| \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 \right| \\ &= \left| (0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) - 0 \right| = \left| -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right| + \left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right| = \\ &= \left| \frac{1}{4} \right| + \left| -\frac{1}{4} \right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{\text{Área} = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(Notar que: $\int_{-1}^0 x^3 - x dx = \frac{1}{4} > 0$ y que $\int_0^1 (x^3 - x) dx = -\frac{1}{4} < 0$)

(b) $g(x) = x^3 - x$ es una función impar, integrada en un intervalo simétrico respecto al origen. Entonces

$$\int_{-1}^1 g(x) dx = 0. \quad \text{Nota: El Área no es cero}$$

③ Así como F está escrito, F es función de u :

$$F(u) = \int_0^u \cos(s^7) ds.$$

(Nota: No hay antiderivados de $\cos(x^7)$.) Per Importante

Entonces, por el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{dF}{du} = \frac{d}{du} \int_0^u \cos(s^7) ds = \cos(u^7)$$

Por otra parte, $u = \sqrt{x}$ es función de x , y tiene derivada

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Importante.

Ahora bien, como $u = u(x)$ es función de x , y $F = F(u)$ es función de u , entonces $F = F(u) = F(u(x))$ es función de x . Por la regla de la cadena.

$$\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \cos(u^7) \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right)$$

y usando que $u = \sqrt{x}$:

$$\boxed{\frac{dF}{dx} = \frac{\cos(x^{7/2})}{2\sqrt{x}}}$$

④ Integrando por partes,

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) - \int f'(x) g(x) dx$$

tenemos que los antiderivados de $h(x) = x e^x$ es:

$$\int h(x) dx = \int \frac{f(x)}{g'(x)} dx = \int x (e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx$$

$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

$$\Rightarrow \boxed{\int x e^x dx = (x-1)e^x + C}$$

⑤ Aquí usamos el ~~teorema~~ de cambio de variables,

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(u) du,$$

(Aquí $u = \varphi(x)$ y $\varphi'(x) dx = du$), por lo que hay que identificar derivados en el integrando:

$$\int 4x^7 e^{x^4} dx = \int x^4 e^{x^4} 4x^3 dx = \int x^4 e^{x^4} (x^4)' dx$$

$$\left[\text{Así: } x^4 = \varphi(x) = u, \text{ y } f(u) = u e^u. \right]$$

$$\int 4x^7 e^{x^4} dx = \int u e^u du = (u-1)e^u + C, \text{ por el problema ④.}$$

Entonces:

$$\boxed{\int 4x^7 e^{x^4} dx = (x^4-1)e^{x^4} + C}$$