CÁLCULO DIFERENCIAL

PROF. JESÚS ADRIÁN ESPÍNOLA ROCHA.
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

EXAMEN #2 .
FECHA. VIERNES 1 DE JULIO DE 2016.

ANSWER KEY.

Instrucciones.

(1) El examen consta de TRES problemas. Total: 100 puntos.
(2) Para recibir el total de puntos por problema, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden, simplifique sus respuestas, muestre sus cuentas y **EXPLIQUE** su argumento.
(3) Apague y guarde su teléfono celular o tableta. Retiraré el examen y yo decidiré sobre su calificación a quienes sorprenda usádolos durante el mismo.

---

(1) **(40 puntos).** De un bosquejo de la gráfica de la siguiente función

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}.$$

Para ello, siga los siguientes pasos. (Pueden parecer muchos pasos, pero no lo son. Todos los hemos hecho en clase).

(a) *Encuentre dominio y simetrías. Intersecciones con los ejes.*
(b) Encuentre asíntotas.
(c) Determine f' y f''.
(d) Determine puntos críticos.
(e) Determine los intervalos en donde f crece y decrece.
(f) Determine los puntos de inflexión. Determine la concavidad.
(g) Usando sea el criterio de la primera o segunda derivada, determine los mínimos y máximos locales de f. Diga los valores de x en donde se alcanzan dichos mínimos y máximos. Luego, determine los mínimos y máximos globales, si los hay.
(h) Dibuje en el plano cartesiano los puntos máximos y mínimos, y los de inflexión. Las intersecciones con los ejes.
(i) *Trace la gráfica.*

(2) **(40 puntos).** Usted dispone de 8m. de alambre para cercar el jardín de su casa. Usted quiere su jardín rectangular y un lado de su jardín está bordeado con el muro de la casa vecina. Encuentre las dimensiones de su jardín de área máxima y encuentre dicha área.

(3) **(20 puntos).** Usted va de viaje de la Ciudad de México a Hermosillo, Sonora. La distancia recorrida es de 2,000 km. y usted hace 40 horas manejando. ¿Qué puede usted decir si observa el velocímetro en todo instante?

EXAM #2 . DIFFERENTIAL CALCULUS Friday, July 1, 2016.

Universidad Autónoma Metropolitana - Azcapotzalco.

ANSWER KEY

(1) The function $f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ is nice. The denominator never vanishes.
Then:

$$Dom(f) = \mathbb{R}$$

Notice that:

$$\underline{f(x) \geq 0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ is an even function: $f(-x) = f(x)$

Then, it suffices to study in the interval $[0, \infty)$.

Also, $f(0) = 0$. Then, it crosses at the origin $(0,0)$.

Now $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$ is the only root (i.e. is the only x-intersept).

(b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2}+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$

Then, $\underline{y = 1}$ is the only horizontal asymptote.

Since $Dom(f) = \mathbb{R}$, there are no vertical asymptotes

(c) Calculate the derivative

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)2x - x^2(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2}$$

$$\Rightarrow \quad f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2\, 2 - 2x \cdot 2(1+x^2)\, 2x}{(1+x^2)^4}$$

$$= 2(1+x^2)\, \frac{(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^4}$$

i.e.

$$\boxed{f''(x) = 2\, \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}}$$

(d) (i) There is <u>no</u> boundary points, since $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

(ii) $f'(x)$ always exists (since $1+x^2 \neq 0$, always).

(iii) We should solve the equation: $f'(x) = 0$ i.e.

$$\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$ i.

Then <u>$x=0$</u> is the only critical point.

(e) If $x > 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0 \Rightarrow f \nearrow$ in $(0, \infty)$

If $x < 0 \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} < 0 \Rightarrow f \searrow$ in $(-\infty, 0)$

(f) The second derivative vanishes if $f''(x) = 0$, ie.

$$\frac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3} = 0 \text{ i.e. } 1 - 3x^2 = 0 \text{ ie } \boxed{x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}}$$

(i) Now, if $f''(x) > 0$, then $2\left(\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}\right) > 0 \Rightarrow 1 - 3x^2 > 0$

$$\Rightarrow x^2 < \frac{1}{3} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Then, f is <u>upward concave</u> if $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

(<u>Remark</u>: $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$).

(ii) If $f''(x) < 0 \Rightarrow 2\left(\frac{1-3x^2}{1+x^2}\right) < 0 \Rightarrow 1-3x^2 < 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3} < x^2 \Rightarrow \begin{cases} \text{Either } \frac{1}{\sqrt{3}} < x \\ \text{or } \quad x < -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Then $f(x)$ is downward concave if $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty)$.

There are two changes of concavity at $\boxed{x = -\frac{1}{\sqrt{3}}}$ and $\boxed{x = \frac{1}{\sqrt{3}}}$. These are the inflexion points.

(g) Since $f' < 0$ in $(-\infty, 0)$, then $f \searrow$ in $(-\infty, 0)$ and since $f' > 0$ in $(0, \infty)$, then $f \nearrow$ in $(0, \infty)$.

Then f reaches a minimum at $x = 0$.

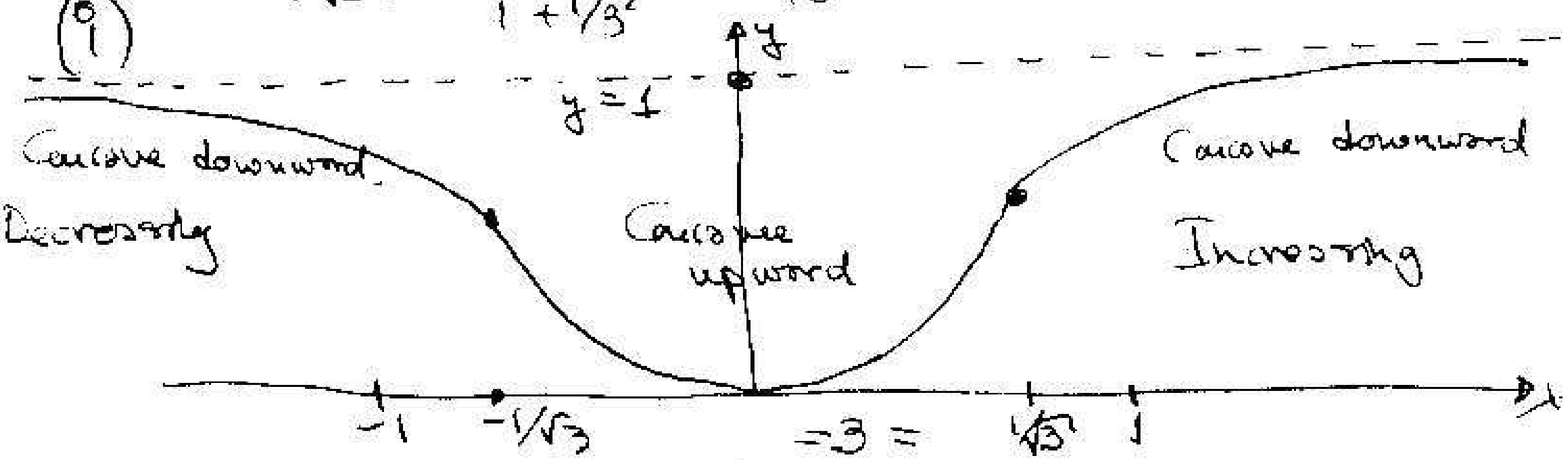
The value of the minimum is $\boxed{f(0) = 0}$ i.e. $\boxed{\min(f) = 0}$

This is a global minimum since we covered the full domain $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

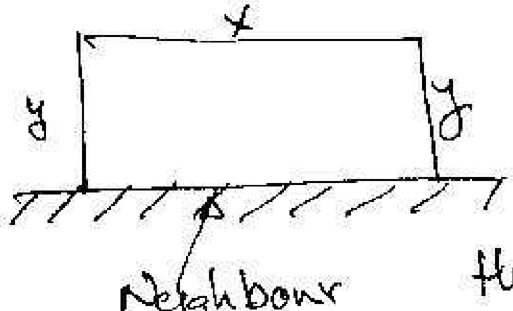
(h) $f(0) = 0$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1/3}{1 + 1/3^2} = \frac{3}{10}$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0.59\right)$.

(i)



(2)



* Area $= xy$
* Length of fence $:= L_0 = 8m$.

Hence: $L_0 = 2y + x$

Therefore, $x = L_0 - 2y$ and substitute in the area:

$$A(y) = (L_0 - 2y)y \quad \text{ie} \quad \boxed{A(y) = L_0 y - 2y^2}$$

is the function we want to minimize.

* $\mathrm{Dom}(A) = \left[0, \frac{L_0}{2}\right] = [0, 4]$, since Area ≥ 0

ie. $L_0 - 2y \geq 0$ and $y \geq 0 \Rightarrow \frac{L_0}{2} \geq y$ and $y \geq 0$

ie $\quad 0 \leq y \leq \frac{L_0}{2}$.

* Now $A'(y) = L_0 - 4y$
* <u>Critical points</u>: (i) Boundary: $y = 0$, $y = L_0/2$

(ii) $A'(y)$ always exists.

(iii) $A'(y) = 0$, if $y = \frac{L_0}{4}$ ie. $\underline{y = 2m}$

$\left[\text{Since } A'(y) = 0 \Rightarrow L_0 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{L_0}{4}\right]$.

Now, if $0 < y < \frac{L_0}{4} \Rightarrow 4y < L_0 \Rightarrow 0 < L_0 - 4y$.

$\Rightarrow 0 < A'(y)$, ie. $A(y) \nearrow$ in $0, \frac{L_0}{4}$.

And if $\frac{L_0}{4} < y < \frac{L_0}{2} \Rightarrow L_0 < 4y \Rightarrow L_0 - 4y < 0$

$\Rightarrow A'(y) < 0 \Rightarrow A(y) \searrow$ in $\left(\frac{L_0}{2}, \frac{L_0}{4}\right)$.

Then,

Then $A\left(\frac{\ell_0}{4}\right)$ is a local maximum

Since we covered the full domain, $A\left(\frac{\ell_0}{4}\right)$ is a global maximum..

Then, the dimensions of the garden is:

$$x = \ell_0 - 2y = \ell_0 - 2\frac{\ell_0}{4} = \frac{\ell_0}{2}.$$

$\boxed{x = \frac{\ell_0}{2}}$ and $\boxed{y = \frac{\ell_0}{4}}$ ie $\boxed{x = 4m}$ $\boxed{y = 2m}$

(since $\ell_0 = 8m$).

and the area: $A\left(\frac{\ell_0}{4}\right) = \left(\ell_0 - 2\left(\frac{\ell_0}{4}\right)\right)\frac{\ell_0}{4} = \left(\ell_0 - \frac{\ell_0}{2}\right)\frac{\ell_0}{4}$

ie. $\boxed{A\left(\frac{\ell_0}{4}\right) = \frac{\ell_0^2}{8}}$ is the maximum area.

i.e. $\boxed{A(2) = 8m^2}$

(3) My position x while driving is a function of time: $x(t)$. It is a continuous function since I do not disappear and appear somewhere else. (in $[0,40]$ hrs)

My velocity $\dot{x}(t)$ is also continuous since I drive nicely. (in the traveling time $[0,40]$ hrs).

Now, we can state that:

$$\frac{x(40) - x(0)}{40-0} = \dot{x}(T), \quad \left(\begin{matrix}\text{Mean Value}\\ \text{theorem}\end{matrix}\right).$$

for some time $T \in (0,40)$.

Then, at some time T (I do not know when),
the speedmeter pointed the instantaneous velocity:

$$\dot{x}(T)$$

By the previous equation, the value of $\dot{x}(T)$ is:

$$\dot{x}(T) = \frac{x(40) - x(0)\,\text{km}}{40\ \text{hrs}} = \frac{2{,}000 - 0\ \text{km}}{40\,\text{hrs}} = 50\ \text{km/hr}.$$

then, the speedmeter should have passed through
50 km/hr