Evaluación de recuperación de Cálculo Diferencial 16P, Matutino

Nombre: (Partial) Answer Key Matrícula:

Nota: Todos los resultados deben llevar su procedimiento.

0.1 Calcular las derivadas de las funciones

$$10\% \ a) \ g(t) = \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2t}} \qquad 10\% \ b) \ h(y) = (\operatorname{arcsec} 2y)^{\ln y}.$$

0.2 10 % Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica del lugar geométrico definido por

$$\cos(xy) + 8x^3 - 1 = y^3 \operatorname{sen} x$$

en el punto $(0, 1)$.

0.3 15 % La altura de un triángulo crece a razón de 1cm/seg. y su área a razón de 2cm²/seg. ¿Con qué razón cambia la base del triángulo cuando su altura mide 10cm y su área 100cm²?

0.4 20 % Para la función $f(x) = (2 - x^2)e^{-x}$ determinar:

- Dominio, ceros, $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to \infty} f(x)$. En caso que haya asíntotas horizontales dar su ecuación.
- Primera derivada y puntos críticos.
- Intervalos de monotonía, es decir de crecimiento y decrecimiento.
- Segunda derivada. Clasificación de puntos críticos y valor de los puntos extremos.
- Intervalos de concavidad.
- Bosquejo gráfico y rango (o imagen).
- Determinar un intervalo donde f tenga función inversa y graficarla.

0.5 15 %. Una lata cilíndrica debe contener 2 litros. Las tapas del cilindro tienen un costo de \$2.25 por dm² y la cara lateral de \$1.90 por dm². Determinar las dimensiones de la lata que minimizan el costo de fabricación y dar el costo mínimo.

0.6 10 % Calcular el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \operatorname{sen} x^2}$$

0.7 10 % Calcular el valor aproximado de $\arctan \frac{1}{10}$ usando un polinomio de Taylor de grado 3 de la función

$$h(x) = \arctan x$$

Evaluación de recuperación. Cálculo Diferencial. 16-P. Matutino

(2) Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica del lugar geométrico definido por

$$\cos(xy) + 8x^3 = 1 + y^3 \sin x$$

en el punto $(0,1)$.

Primero verifiquemos que el punto se encuentra en la curva dada:

$$\text{Lado izq.} = \left(\cos(xy) + 8x^3\right)\Big|_{(0,1)} = \cos(0\cdot 1) + 8\cdot 0^3 = 1+0 = 1$$

$$\text{Lado derecho} = \left(1 + y^3 \sin x\right)\Big|_{(0,1)} = 1 + 1^3 \sin(0) = 1+0 = 1,$$

y por tanto se cumple la ecuación y está en la curva.

Calculamos ahora implícitamente $\frac{dy}{dx}$:

$$-\sin(xy)\frac{d}{dx}(xy) + 24x^2 = \frac{d(y^3)}{dx}\sin x + y^3\cos x$$

i.e.,

$$-\sin(xy)\,y - x\sin(xy)\frac{dy}{dx} + 24x^2 = 3y^2\frac{dy}{dx}\sin x + y^3\cos x.$$

i.e.,

$$-\sin(xy)\,y + 24x^4 - y^3\cos x = \left(x\sin(xy) + 3y^2\sin(xy)\right)\frac{dy}{dx}.$$

Evaluando en $(0,1)$:

$$-1 = 0\cdot\frac{dy}{dx}$$

La única opción para satisfacer esta ecuación es:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\infty.$$

Es decir, tenemos tangencia vertical y la recta tangente es vertical. Pasa por $(0,1)$ con $x=0$, i.e. la recta tangente es.

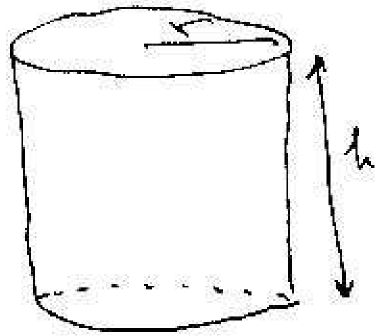
$$\boxed{x=0} \quad \text{i.e.,} \quad \boxed{\text{el eje } Y},$$

y la recta normal debe ser horizontal. Como pasa por $(0,1)$, $y=1$. Así:

$\boxed{y=1}$ es la recta normal

---

(5) Una lata cilíndrica debe contener dos litros. Las tapas del cilindro tienen un costo de \$2.25 por dm^2 y la cara lateral \$1.90 por dm^2. Determinar las dimensiones de la lata que minimizan el costo de fabricación y dar el costo mínimo



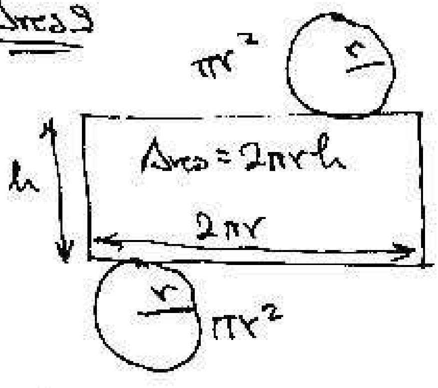
Tenemos r y h el radio y altura de la lata dados en dm. El volumen $V_0 = 2dm^3 = 2$ litros se calcula:

$$\pi r^2 h = V_0$$

Si $p = \$2.25/dm^2$ y $q = \$1.90$ son los costos dados y como la superficie de las dos tapas es $2\pi r^2$ y de la pared es $2\pi r h$, el costo será:

$$C = p(2\pi r^2) + q(2\pi r h).$$

Area



Pero como $h = \frac{V_0}{\pi r^2}$, tenemos el costo de fabricación como función de r:

$$C(r) = 2\pi p r^2 + 2q\pi r\left(\frac{V_0}{\pi r^2}\right)$$

i.e.

$$C(r) = 2\pi p r^2 + \frac{2qV_0}{r}$$

Notemos que $Dom(C) = (0, \infty)$, $C(r) > 0$ y continua en su dominio y que $C(r) \xrightarrow[r \to 0^+]{} +\infty$.

Podemos calcular su derivada:

$$C'(r) = 4\pi p r - \frac{2qV_0}{r^2},$$

también es continua en su dominio, $\mathrm{Dom}(C') = (0, \infty)$.

Ahora bien, $C'(r) > 0 \Rightarrow 4\pi p r - \frac{2qV_0}{r^2} > 0$

$$\Rightarrow 4\pi p r^3 > 2qV_0 \Rightarrow r > \left(\frac{qV_0}{2\pi p}\right)^{1/3} \stackrel{\text{def}}{=} r_0.$$

De igual modo, $C'(r) < 0 \Rightarrow 4\pi p r - \frac{2qV_0}{r^2} < 0$

$$\Rightarrow 4\pi p r^3 < 2qV_0 \Rightarrow r < \left(\frac{qV_0}{2\pi p}\right)^{1/3} = r_0.$$

Así, $\left.\begin{array}{l} C(r) \text{ es creciente en } (r_0, \infty) \\ C(r) \text{ es decreciente en } (0, r_0) \end{array}\right\} \Rightarrow C(r)$ tiene un mínimo global en r_0,

cuyo valor es: $C(r_0) = 2\pi p r_0^2 + \frac{2q}{r_0} V_0$.

La altura de la lata será:

$$h_0 = \frac{V_0}{\pi r_0^2}$$

Evaluando r_0 con q, p, V_0, obtenemos.

$$r_0 = \sqrt[3]{\frac{qV_0}{2p\pi}} = \sqrt[3]{\frac{(1.9)2}{2(2.25)\pi}} \simeq 0.7 \text{ dm} \quad \boxed{r_0 = 0.7 \text{ dm}}$$

$$h_0 = \frac{V_0}{\pi r_0^2} \simeq \frac{2}{\pi(0.7)^2} \Rightarrow \boxed{h_0 \simeq 1.3 \text{ dm}}$$

y el costo mínimo será:

$$C_0 = 2\pi p r_0^2 + 2\pi r_0 h_0 \simeq 2\pi(2.25)(0.7)^2 + 2\pi(0.7)(1.3)$$

$$\Rightarrow \boxed{C_0 \simeq 12.65 \$}$$