Evaluación de recuperación de Cálculo Diferencial 16P. Vespertino

Nombre: ANSWER KEY Matrícula:

Nota: Todos los resultados deben tener su procedimiento.

1. Calcular las derivadas de las funciones

$$10\% \quad a)\ g(t) = \frac{\sqrt{4-3t}}{3t^2+3} \qquad 10\% \quad b)\ h(y) = (\operatorname{sen}(3y))^{\ln y}.$$

2. 10 % Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica del lugar geométrico definido por

$$\arctan\frac{x}{y} + xy^3 - \frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi y}{2} = 1$$

en el punto $(1, 1)$.

3. 15 % Un niño vuela una cometa a una altura de 15 m y el viento aleja horizontalmente la cometa a razón de 1.25 m / seg. ¿Qué tan rápido debe el niño soltar la cuerda cuando la cometa está a 25 m de él?

4. 20 % Para la función $f(x) = (3 - x^2)e^x$ determinar:
   - Dominio, ceros, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to\infty} f(x)$. En caso que haya asíntotas horizontales dar su ecuación.
   - Primera derivada y puntos críticos.
   - Intervalos de monotonía, es decir de crecimiento y decrecimiento.
   - Segunda derivada. Clasificación de puntos críticos y valor de los puntos extremos.
   - Intervalos de concavidad.
   - Bosquejo gráfico y rango (o imagen).
   - Determinar un intervalo donde f tenga función inversa y graficarla.

5. 15 % Se desea construir una pista de carreras cuya longitud sea de 4 km. La pista consta de dos trazos rectilíneos paralelos y conectados en sus extremos por dos semicírculos. ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área del rectángulo que forman los segmentos rectilíneos sea máxima?

6. 10 % Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x - \operatorname{sen} x}{x^2 \operatorname{sen} x}$$

7. 10 % Calcular el valor aproximado de sen 181° usando un polinomio de Taylor de grado 5 de la función

$$h(x) = \operatorname{sen} x$$

EXAMEN DE RECUPERACION Cálculo Diferencial 16-P. Vespertino.

1 (a) 10%

$$g(t) = \frac{\sqrt{4-3t}}{3t^2+3} = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{4-3t}}{(t^2+1)}$$

$$g'(t) = \frac{1}{3}\left[\frac{(t^2+1)\frac{(-3)}{2\sqrt{4-3t}} - \sqrt{4-3t}\,(2t)}{(t^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-3(t^2+1) - 2(4-3t)2t}{2\sqrt{4-3t}\,(t^2+1)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-3t^2-3+12t^2-16t}{2\sqrt{4-3t}\,(t^2+1)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{g'(t) = \frac{1}{3}\left[\frac{9t^2-16t-3}{2\sqrt{4-3t}\,(t^2+1)^2}\right]}$$

(b) 10% Consider $\ln(h) = \ln(\sin 3y)^{\ln y}$

$$= (\ln y)\ln(\sin 3y)$$

Computing the derivative, using the chain rule and the product rule.

$$\frac{h'}{h} = (\ln y)'\ln(\sin(3y)) + \ln y\,(\ln(\sin 3y))'$$

$$= \frac{1}{y}\ln(\sin(3y)) + \ln y\,\frac{(\sin 3y)'}{\sin 3y}$$

$$= \frac{\ln(\sin(3y))}{y} + \ln y\,\frac{3\cos(3y)}{\sin(3y)}$$

$$\Rightarrow \boxed{h'(y) = (\sin 3y)^{\ln y}\left(\frac{\ln(\sin 3y)}{y} + 3\ln y\,\frac{\cos 3y}{\sin 3y}\right)}$$

Evaluación de recuperación. Cálculo Diferencial. 16 P. Vespertino

(2) Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la
10% gráfica del lugar geométrico definido por

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + xy^3 = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) + 1.$$

en el punto $(1,1)$

Verifiquemos que el punto se encuentra en la curva:

$$\text{Lado izq.} = \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{y}\right) + xy^3\right)\Big|_{(1,1)} = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{1}\right) + 1^4 = \frac{\pi}{4} + 1$$

$$\text{Lado der.} = \left(\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right) + 1\right)\Big|_{(1,1)} = \frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) + 1 = \frac{\pi}{4} + 1,$$

y por tanto $(1,1)$ está en la curva.

Calculemos implícitamente $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{d}{dx}(xy^{-1}) + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\frac{\pi}{2}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\frac{dy}{dx}\right) + y^3 + 3xy^2\frac{dy}{dx} = \frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{y\left(1+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right)} + y^3 = \left(\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}y\right) - 3xy^2 + \frac{x}{y^2+x^2}\right)\frac{dy}{dx}$$

Evaluando en $(1,1)$:

$$\frac{1}{1(1+1^2)} + 1 = \left(\frac{\pi^2}{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 3 + \frac{1}{1+1}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{2} + 1 = \left(0 - 3 + \frac{1}{2}\right)\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{3}{2} = \left(-\frac{5}{2}\right)\frac{dy}{dx}$$

ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{5}$ es la pendiente de la recta tangente a la curva dada en el punto $(1,1)$.

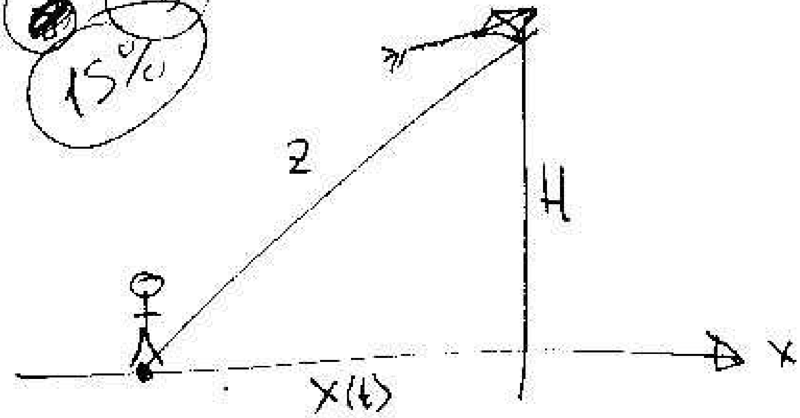
Así, la ecuación de la recta tangente es:

$$\boxed{y - 1 = -\frac{5}{3}(x-1),} \quad \text{o bien} \quad \boxed{y = -\frac{5}{3}x + \frac{8}{3}}$$

La pendiente de la recta normal es $m_{perp} = \frac{5}{3}$, y la ecuación de la recta normal es:

$$\boxed{(y-1) = \frac{3}{5}(x-1)} \quad \text{o bien} \quad \boxed{y = \frac{3}{5}x + \frac{2}{5}}$$

3 15%



$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v = 1.25 \frac{m}{sec} = \frac{5}{4} \frac{m}{sec}$

$H = 15m$ - fixed.

We must find $\frac{dz}{dt}$, when $z = 25m$.

By Pythagorean theorem $x^2 + H^2 = z^2$. H is fixed.

Compute the derivative: $2x \frac{dx}{dt} + 0 = 2z \frac{dz}{dt}$. - - - - - - - - - - - - - (*)

(*) ... i.e. ... $x \frac{dx}{dt} = z \frac{dz}{dt}$.

We know z and $\frac{dx}{dt} = v$. It remains to compute x.

Then we can determine $\frac{dz}{dt}$.

To compute x, we use again Pythagoras' theorem:

$$x = \sqrt{z^2 - H^2}$$

When $z = 25$ m:

$$x = \sqrt{25^2 - 15^2} = \sqrt{5^2(5^2 - 3^2)} = 5\sqrt{16} = 20 \text{ m}.$$

From eq'n (*) above:

$x = 20m$

$\frac{dx}{dt} = \frac{5}{4}$ m/sec

$z = 25$ m

$\Rightarrow 20 \cdot \frac{5}{4} = 25 \frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{20 \cdot 5}{25 \cdot 4} = \frac{100}{100}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dz}{dt} = 1 \text{ m/sec}}$

(4) $f(x) = (3-x^2)e^x$

20%

(a) $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

$f(x) = 0 \Rightarrow (3-x^2)e^x = 0 \Rightarrow 3-x^2 = 0$

$= (\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x) = 0 \Rightarrow$ Zeros $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} \\ x_2 = -\sqrt{3} \end{array}}$

On the one hand:

$\lim\limits_{x \to -\infty} (3-x^2)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3-x^2}{e^{-x}}$ is undetermined of the form "$\frac{\infty}{\infty}$".

Use L'Hôpital:

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2x}{-e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3x}{e^{-x}}$ is undetermined of the form "$\frac{\infty}{\infty}$"

use L'Hôpital again:

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{3}{-e} = \lim\limits_{x \to -\infty} -3e^x = 0$

On the other hand.

$\lim\limits_{x \to \infty} (3-x^2)e^x = \lim\limits_{x \to \infty} (3-x^2) \lim\limits_{x \to \infty} e^x = -\infty \cdot \infty = -\infty.$

Hence, there is just one horizontal asymptote:

$y = 0,$

and there is no vertical asymptotes since $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

(b) First derivatives. $f'(x) = (-2x)e^x + (3-x^2)e^x$

i.e. $f'(x) = (3-2x-x^2)e^x =$
$= -(x^2+2x-3)e^x$

Critical points:

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4(-3)}}{2}$

$x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm 2\sqrt{1+3}}{2} = -1 \pm \sqrt{4} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{array}}$ Critical points.

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -(x-1)(x+3)\, e^x}$$

(c) $f'(x) < 0$, if $x > 1$ $\Rightarrow f \searrow$. decreasing

$f'(x) > 0$, if $-3 < x < 1$ $\Rightarrow f \nearrow$ increasing

$f'(x) < 0$, if $x < -3$ $\Rightarrow f \searrow$. decreasing

(d) $f''(x) = -(2x+2)e^x - (x^2+2x-3)e^x$
$= -(x^2+4x-1)e^x$

Classification of critical points $x_1 = 1,\ x_2 = -3$

Evaluate $f''(x)$ at $x_1 = 1,\ x_2 = -3$.

$f''(1) = -(1+4-1)e = -4e < 0$

$f''(-3) = -(9-12-1)e^{-3} = -(-4)e^{-3} = 4e^{-3} > 0$

$\Rightarrow$ $\boxed{x_1 = 1 \text{ is a local maximum}}$

$\boxed{x_2 = -3 \text{ is a local minimum}}$

(e) Zeros of $f''(x) = -(x^2+4x-1)e^x$.

$$x^2+4x-1=0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2-4(-1)}}{2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4+1}}{2}$$

$$= -2 \pm \sqrt{5} = \begin{cases} \sqrt{5}-2 \simeq 0.24 \\ -\sqrt{5}-2 \simeq -4.24 \end{cases}$$

Hence

$$f''(x) = -\left(x-(\sqrt{5}-2)\right)\left(x+(\sqrt{5}+2)\right)e^x$$

From this:

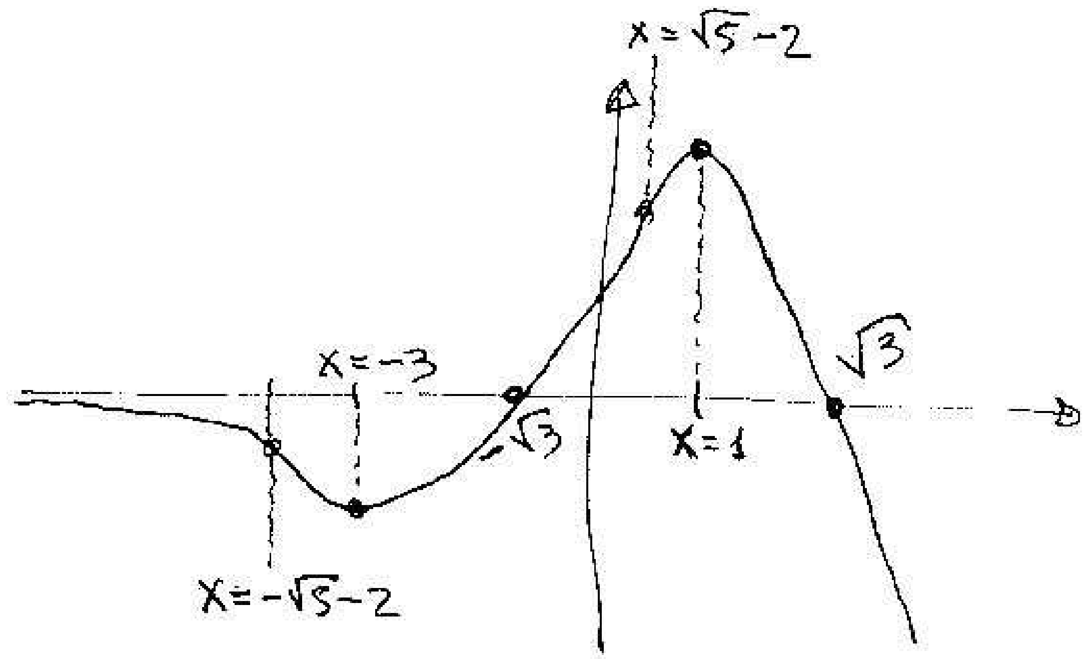
$f''<0$, if $x > \sqrt{5}-2 \simeq 0.24 \Rightarrow f$ is downwards concave

$f''>0$, if $-\sqrt{5}-2 < x < \sqrt{5}-2 \Rightarrow f$ is upwards concave

$f''<0$, if $x < -\sqrt{5}-2 \simeq -4.24 \Rightarrow f$ is downwards concave

Then $\left.\begin{array}{l} x_a = \sqrt{5}-2 \simeq 0.24 \\ x_b = -\sqrt{5}-2 \simeq -4.24 \end{array}\right\}$ are inflexion points.

(f)

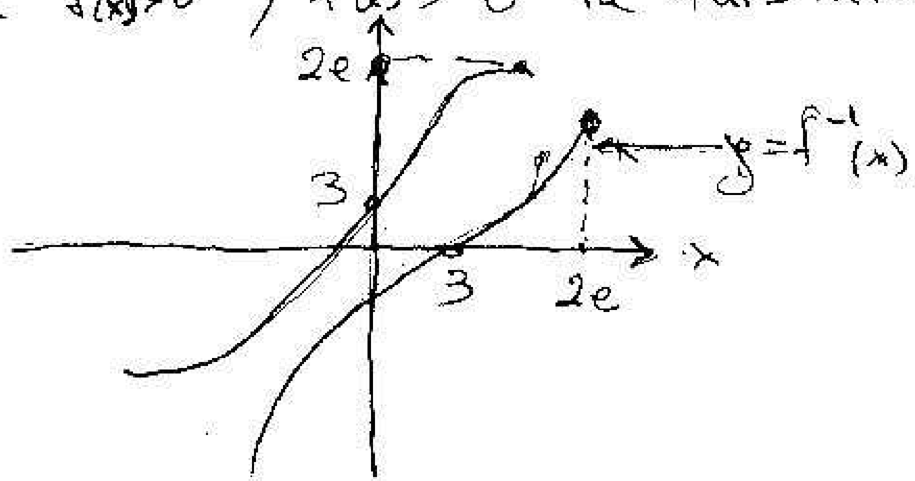


Hence $\text{Rang}(f) = (-\infty, f(1)]$.

But $f(1) = (3-1^2)e^1 = 2e$

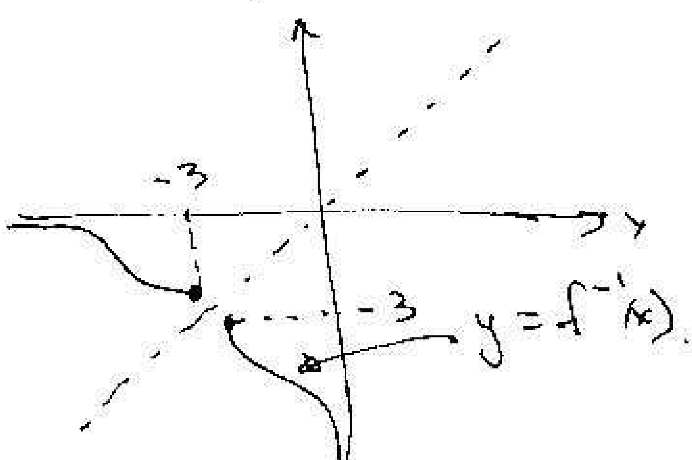
$\Rightarrow \boxed{\text{Rang}(f) = (-\infty, 2e]}$

(g) The function can be invertible in $[-3, 1]$, since $f'(x) > 0$, $f(x) \nearrow 0$ in this interval.



Other options:

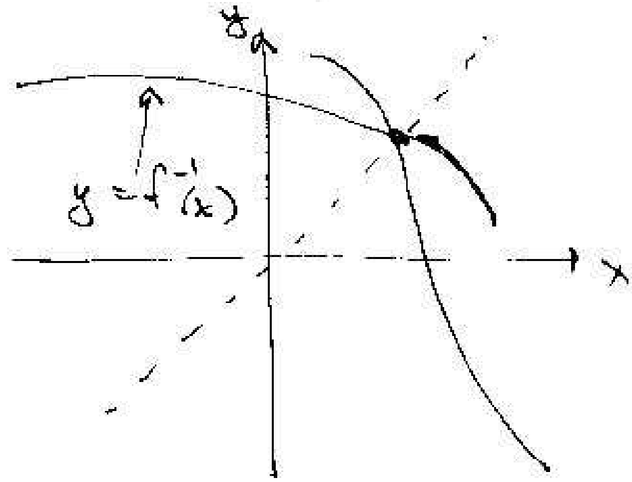
On $(-\infty, -3]$



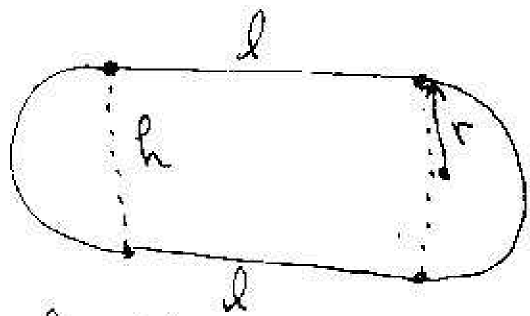
$f(-3) = (3-9)e^{-3}$

$= \frac{-3}{e^3}$ (this is <1)

Or $[1, \infty)$



5) (15%) Se desea construir una pista de carreras cuya longitud sea de 4 km. La pista consta de dos trazos rectilíneos paralelos y conectados en sus extremos por dos semicírculos ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área del rectángulo que forman los segmentos rectilíneos sea máxima?



Debemos maximizar $A = lh$. La longitud de la pista en sus tramos circulares es $2\pi r$. Así la longitud de la pista es:

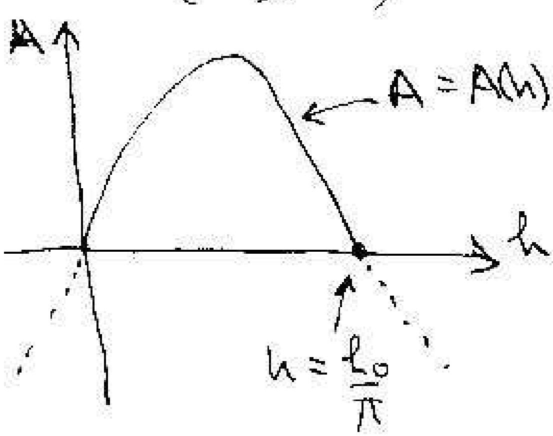
$$2\pi r + 2l = L_0 = 4\text{ km}$$

Pero $2r = h$. Así:

$$\pi h + 2l = L_0$$

Despejando $l = \frac{L_0 - \pi h}{2}$, podemos tener el área como función de h:

$$A = \left(\frac{L_0 - \pi h}{2}\right) h \quad \text{i.e.} \quad A(h) = \frac{L_0}{2} h - \frac{\pi}{2} h^2,$$



es un segmento de una parábola que abre hacia abajo, con dominio

$$\mathrm{Dom}(A) = \left[0, \frac{L_0}{\pi}\right],$$

pues $A > 0$ y $h > 0$.

Ahora: $A'(h) = \frac{L_0}{2} - \pi h$.

Así, $A'(h) > 0 \Rightarrow \frac{L_0}{2} - \pi h > 0 \Rightarrow \frac{L_0}{2\pi} > h$, i.e. $0 < h < \frac{L_0}{2\pi}$.

y, $A'(h) < 0 \Rightarrow \frac{L_0}{2} - \pi h < 0 \Rightarrow \frac{L_0}{2\pi} < h$, ie $\frac{L_0}{2\pi} < h < \frac{L_0}{\pi}$

Así $A(h)$ es creciente en $\left[0, \frac{L_0}{2\pi}\right]$
y $A(h)$ es decreciente en $\left[\frac{L_0}{2\pi}, \frac{L_0}{\pi}\right]$ $\Bigg\} \Rightarrow A(h)$ tiene un máximo en $\boxed{h_0 = \frac{L_0}{2\pi}}$

Así, el diámetro de los semicírculos es:

$$\boxed{h_0 = \frac{L_0}{2\pi}} \quad \left(\text{radio} = \frac{L_0}{4\pi}\right).$$

y la longitud de los segmentos rectos es:

$$l = \frac{L_0 - \pi h_0}{2} = \frac{L_0 - L_0/2}{2} = \frac{L_0/2}{2} \Rightarrow \boxed{l = \frac{L_0}{4}}$$

Evaluando en el valor dado $L_0 = 4$ km:

$h_0 = \frac{2}{\pi}$ km

y $l_0 = \frac{4 \text{ km}}{4}$

$\Rightarrow \boxed{h_0 \simeq 0.64 \text{ km}}$ es el diámetro

($r_0 \simeq 32$ km, el radio)

$\boxed{l_0 = 1 \text{ km}}$

---

(6) Calcular el límite:

10% $\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$ is of the form "$\frac{0}{0}$". Use L'Hôpital.

L'Hôpital

$$\overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x\sin x + x^2\cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{-x\sin x}{x(2\sin x + x\cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{(2\sin x + x\cos x)}$$ is of the form "$\frac{0}{0}$" Use L'Hôpital

L'Hôpital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{2\cos x + \cos x - \sin x} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{3\cos x - \sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-1}{3+0} = -\frac{1}{3}$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = -\frac{1}{3}}$$

(7) Compute $\sin(181°)$. Approximate.

(10%) This is to say, approximate.

$\sin(x+h)$.

where $x = \pi$, and $h = \frac{2\pi}{360}(1°)$ rad $= \frac{\pi}{180}$ rad.

Hence, approximate: $\sin(\pi + h) = -\sin(h)$.

thence:

$$\sin(\pi+h) \cong -\left(h - \frac{1}{3!}h^3 + \frac{1}{5!}(h^5)\right)$$

$$= -\left(\frac{\pi}{180} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^5\right)$$

$$\boxed{\sin(\pi+h) \cong -(0.017452406437 28)}.$$

Now, using the calculator directly,

$$\sin(181°) = -0.0174524064372\underline{83}$$

Differs from this.

Almost Same amount.