UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO DIFERENCIAL
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2016.

EXAMEN # 1.
FECHA: JUEVES 27 DE OCTUBRE DE 2016

Nombre: ANSWER KEY
Instrucciones:

- El examen consta de **CINCO** problemas, cada uno de 20 puntos,
- Tienen **una hora con veinticinco (25)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus exámenes.
- **EXPLÍQUEN SUS RESPUESTAS A DETALLE. Problema sin explicación o desarrllo vale cero puntos.**

PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)**
   (a) Usando al definición, calcule la función derivada de
   $$f(x) = \sqrt{x+1}$$
   (b) Encuentre la recta perpendicular a la gráfica de $f(x)$ correspondiente a $x = 0$.

(2) **(20 puntos.)** Considere un cubo que crece con el tiempo. Si su superficie crece a una razón de $24\text{cm}^2/\text{seg}$, ¿a qué razón crece su volumen?

(3) **(20 puntos).** Considere la función $y = g(x)$ dada implícitamente por
$$x^2 + xy - y^2 = 1$$
   (a) Verifique que el punto (2,3) está en la gráfica de la función.
   (b) Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ en dicho punto.

(4) **(20 puntos).** Calcule la derivada de
$$h(x) = (\tan(x^2 + \sqrt{x}))^3.$$

(5) **(20 puntos).** Aproxime, usando aproximación lineal y usando una fracción, el valor de $\sqrt{96}$.

UAM - Azcapotzalco | Jueves, Octubre 27, 2016

Cálculo Diferencial Examen #1

---

(1) (a) $\frac{df}{dx}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1}-\sqrt{x+1}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1)-(x+1)}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{df}{dx}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}$$

(b) The slope of the tangent line at $x=0$ is $\frac{df}{dx}(0)$, i.e.

$$m = \frac{df}{dx}(0) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}.$$

Then, the slope of the perpendicular line is:

$$m_{perp} = \frac{-1}{m} = -2$$

Equation of perpendicular line is

$y - y_0 = m_p(x - x_0)$

$m_p = -2, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = f(0) = \sqrt{1} = 1$

Hence $\boxed{y - 1 = -2(x - 0)}$

$$\boxed{y = -2x + 1}$$

(2). Suppose the cube has the sides of leuth a.

Then, $V = a^3$ is the volume

$S = 6a^2$ is the surface area.

Then: $a = \sqrt{\frac{S}{6}} = \left(\frac{S}{6}\right)^{1/2}$

Hence $V = \left(\frac{S}{6}\right)^{3/2}$

Now $\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2}\left(\frac{S}{6}\right)^{1/2} \frac{1}{6}\frac{dS}{dt} = \frac{1}{4}\left(\frac{S}{6}\right)^{1/2}\frac{dS}{dt}$

But $\frac{dS}{dt} = 24$ cm²/seg.

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{24}{4}\left(\frac{S}{6}\right)^{1/2}$ $\boxed{\frac{dV}{dt} = 6\left(\frac{S}{6}\right)^{1/2} \frac{cm^2}{sec}}$ cm²

or $\boxed{\frac{dV}{dt} = \sqrt{6}\sqrt{S} \text{ cm}^3/\text{sec}}$

Different way $\frac{dS}{dt} = 12a\frac{da}{dt} \Rightarrow 24 = 12a\frac{da}{dt}$

$\Rightarrow \frac{da}{dt} = \frac{2}{a}$. Now, $\frac{dV}{dt} = 3a^2\frac{da}{dt} = 3a^2 \cdot \frac{2}{a} = 6a$

$\Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = 6a}$, since $6a^2 = S \Rightarrow a = \sqrt{\frac{S}{6}} \Rightarrow \boxed{\frac{dV}{dt} = 6\sqrt{\frac{S}{6}}}$

ie. $\boxed{\frac{dV}{dt} = \sqrt{6S}}$ Same result

③ (a) $x^2+xy-y^2 = 2^2 + 2\cdot 3 - 3^2 = 4+6-9 = 1$ ✓

It ~~go~~ is on the curve

(b) $\frac{d}{dx}\left(x^2+xy-y^2\right) = \frac{d}{dx}(1)$, by differentiating on both sides of the equation.

$$\Rightarrow \quad 2x + x'y + xy' - 2yy' = 0$$

$$2x + y + xy' - 2yy' = 0$$

$$2x + y + (x-2y)y' = 0$$

$$\boxed{y' = \frac{-(2x+y)}{x-2y}} \quad \text{or} \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y}{2y-x}}$$

④ Compute the derivative of

$$h(x) = \left(\tan\left(x^2+\sqrt{x}\right)\right)^3 \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{2\cdot 2+3}{2\cdot 3-2} = \frac{7}{4}$$

$$\frac{dh}{dx} = 3\left(\tan\left(x^2+\sqrt{x}\right)\right)^2 \frac{d}{dx}\left(\tan\left(x^2+\sqrt{x}\right)\right), \text{ by chain rule}$$

$$= 3\left(\tan\left(x^2+\sqrt{x}\right)\right)^2 \sec^2\left(x^2+\sqrt{x}\right) \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2+\sqrt{x}\right)$$

by chain rule

$$\boxed{\frac{dh}{dx} = 3\left(\tan\left(x^2+\sqrt{x}\right)\right) \sec^2\left(x^2+\sqrt{x}\right) \cdot \left(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}$$

by sum rule and power rule

(5) Approximate $\sqrt{96}$.

Using the function $f(x) = \sqrt{x}$,

and the point $x_0 = 100$, we have the linearization

function: $\mathcal{L}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Then:

$$f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{100} = 10$$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{100}} = \frac{1}{20}.$$

So that:

$$\boxed{\mathcal{L}(x) = 10 + \frac{1}{20}(x - 100)}$$

Take $x = 96$.

$$f(96) \approx \mathcal{L}(96) = 10 + \frac{1}{20}(96 - 100) = 10 - \frac{4}{20}$$

$$= 10 - \frac{1}{5} = 10 - \frac{2}{10} = 9.8$$

$$\boxed{\sqrt{96} \simeq 9.8}$$