93

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2016.

EXAMEN # 3
FECHA: JUEVES 8 DE DICIEMBRE DE 2016
PROF.

Prof: (10 puntos.) ANSWER KEY.
(Mi nombre debe estar completo y bien escrito).

Nombre: ____________________

Instrucciones:

- El examen consta de **TRES** problemas de 30 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **veinticinco (25)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Eviten la pena de quitarles sus exámenes.
- **ARGUMENTEN SUS RESPUESTAS. DESARROLLEN SUS CUENTAS. Simplifiquen.** Problema sin argumento o desarrollo vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(30 puntos.)** Encuentre el dominio de la función f a continuación definida. Encuentre m y b tal que la función sea continua en su dominio. Bosqueje la gráfica.

$$f(x) = \begin{cases} 4 - x^4, & \text{si } \ x < 0; \\ mx + b, & \text{si } \ 0 \le x < 3; \\ 1 & \text{si } \ 3 < x < 5. \end{cases}$$

(2) **(30 puntos.)** Usando alguna de las técnicas estudiadas en clase, encuentre la mejor posible aproximación a $\sqrt{66}$.

(3) **(30 puntos.)** Un automóvil se mueve en una pista recta. Su posición al tiempo t está dada por

$$x(t) = x^2 - x.$$

Encuentre la velocidad del auto al tiempo $t = 3$.

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO | Universidad Autónoma Metropolitana
Unidad Azcapotzalco.

Exam #3.

Thursday, December 8, 2016

(1) $f(x) = \begin{cases} 4-x^4, & \text{if } x<0 \\ mx+b, & \text{if } 0 \le x \le 3 \\ 1, & \text{if } 3<x<5. \end{cases}$

$\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 5)$.

On $(-\infty,0)$, $f(x) = 4-x^4$ is a polynomial; then, it is continuous

On $(0,3)$, $f(x) = mx+b$, is also a polynomial, then it is also continuous.

On $(3,5)$, $f(x) = 1$ is the constant function, then, it is continuous.

At $x=0$

(a) $f(0) = b$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 4-x^4 = 4$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} mx+b = b$.

For the limit to exist both limits should be the same. Hence

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4 = b$

$\Rightarrow \boxed{b=4}$ and $f(0)=4$

(c) Since $\lim_{x\to 0} f(x) = 4$ and $f(0) = 4 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ and

f is continuous at $x=0$

At $x=3$ (a) $f(3) = 3m+b = 3m+4$ (since $b=4$)

(b) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} mx+b = 3m+4$

$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} 1 = (= 1 =)$

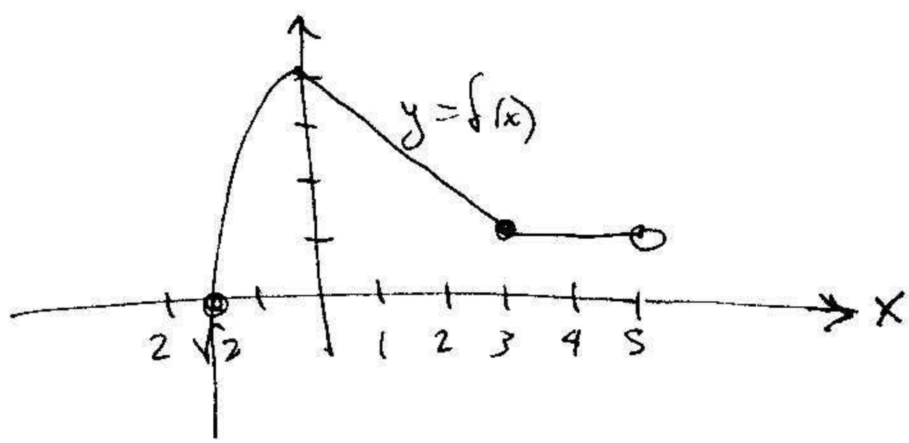
$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f = 1$. The limit exists if both limits exists $\lim_{x \to 3} f(x) = 3m + 4 = 1$.

$$\Rightarrow \quad 3m + 4 = 1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1-4}{3}$$

$$\Rightarrow \quad m = \frac{1-4}{3} = -1$$

(c) $f(3) = 3m + 4 = \lim_{x \to 3} f(x)$

$\Rightarrow$ f is continuous if $\boxed{m = -1}$ and $\boxed{b = 4}$



---

(2) We need to find the linearization of $f(x) = \sqrt{x}$ about a point $x = a$.

Since $f(64) = \sqrt{64} = 8$ can be easily computed, and it is close to $\sqrt{66}$, we can use,

$$x = a = 64. \qquad (a, f(a))$$

Then, the tangent line about $(64, \sqrt{64}) = (64, 8)$,

is $\quad y = m(x-a) + f(a)$

i.e. $\quad y = m(x - 64) + 8$

Now,

$$m = \lim_{x\to 64} \frac{f(x) - f(64)}{x - 64} = \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{x - 64} = \lim_{x\to 64}$$

$$= \lim_{x\to 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} - 64} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+8}\right) = \lim_{x\to 64} \frac{x - 8^2}{(x-64)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+8} =$$

$$= \lim_{x\to 64} \frac{1}{\sqrt{x}+8} = \frac{1}{\sqrt{64}+8} = \frac{1}{16}$$

Then, the straight line tangent to $(64, 8)$ is:

$$y = \frac{1}{16}(x - 64) + 8 .$$

Hence, the linearization is

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{16}(x - 64) + 8$$

Now:

$$\sqrt{66} \approx \mathcal{L}(66) = \frac{1}{16}(66 - 64) + 8 = \frac{1}{16} \cdot 2 + 8$$

$$\boxed{\sqrt{66} \approx 8 + \frac{1}{8} = 8.12500}$$

Our calculator computes: $\sqrt{66} \approx 8.124038$.

$\text{Error} \approx 97 \times 10^{-3}$

$\boxed{\text{Error} \approx 9.7 \times 10^{-2}}$

---

(3) The position at $t = 3$ is: $x(3) = 3^2 - 3 = 6$.

at $t = t$ is $x(t) = t^2 - t$.

Then: $$\frac{dx}{dt}(3) = \lim_{t\to 3} \frac{x(t) - x(3)}{x - 3} = \lim_{t\to 3} \frac{t^2 - t - 6}{t - 3}$$

$$= \lim_{t\to 3} \frac{(t+2)(t-3)}{t-3} = \lim_{t\to 3} (t + 2) = 5 \text{ m/sec}$$

$$\boxed{\frac{dx}{dt}(3) = 5 \text{ m/sec}}$$

$= 3 =$