DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

Evaluación global de Introducción al Cálculo (16-O)

Nombre ANSWER KEY 15:00-18:00 h 13-12-16

Indicaciones generales: El examen global consta de los ejercicios indicados con asterisco. En caso de presentar sólo una parte, resuelva todos los ejercicios de dicha parte. **Toda respuesta debe mostrar el procedimiento.**

PRIMERA PARTE

1. Resuelva las siguientes desigualdades. Exprese las soluciones usando notación de intervalos.

(a) $x^2 + 3x - 5 \geq 2x^2 - 3$

(b) $\frac{3+x}{5-2x} \leq 3$

2.* **(10 p.)** Considere la función f definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-2}, & \text{si } 2 \leq x \leq 6 \\ -x, & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{-x-2}, & \text{si } -6 \leq x \leq -2 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la gráfica de f.

(b) Determine el dominio, el rango o imagen, las raíces o ceros y la paridad de f.

(c) Obtenga la gráfica de $h(x) = 2 - f(x)$.

3.* **(15 p.)** Sean f, g y h funciones tales que $f(x) = \frac{x-5}{x}$, $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ y $h(x) = \sqrt{5 - |x|}$.

(a) Obtenga los dominios de f, g y h.

(b) Defina las funciones $\frac{g}{h}$ y $f \circ g$, y determine sus correspondientes dominios.

4.* **(10 p.)** Una empresa desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada, de $450\,\text{cm}^3$ de volumen. Exprese la superficie de la caja en función de la longitud del lado de su base.

SEGUNDA PARTE

1.* **(10 p.)** Bosqueje la gráfica de la función g dada por $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$, indicando su periodo, amplitud y rango o imagen.

2.* Calcule los siguientes límites:

(a) **(6 p.)** $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{x + 3}$ (b) **(7 p.)** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x - 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (c) **(7 p.)** $\lim\limits_{x \to} \dfrac{1 - \cos^3(x)}{\text{sen}^2(x)}$

3. Considere la función H, definida por $H(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x - 3}$.

(a) * **(5 p.)** Determine el dominio y los ceros o raíces de H, así como las ecuaciones de las asíntotas de la gráfica de H.

(b) * **(5 p.)** Bosqueje la gráfica de H y obtenga su rango o imagen.

(c) Determine los intervalos en los cuales H es creciente/decreciente.

4. Sea F la función definida como:

$$F(x) = \begin{cases} \cos(2x), & \text{si } x < -2\pi \\ ax + b, & \text{si } -2\pi \leq x \leq \pi \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x), & \text{si } x > \pi \end{cases}$$

Determine los valores de las constantes a y b para que existan $\lim\limits_{x \to -2\pi} F(x)$ y $\lim\limits_{x \to \pi} F(x)$.

TERCERA PARTE

1. Sea h la función definida como sigue:

$$h(x) = \begin{cases} 5 - 2x, & \text{si } x \leq -1 \\ ax^2 + bx + 1, & \text{si } -1 < x < 1 \\ 2x - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Encuentre el valor de las constantes adecuadas a y b, de modo que h sea continua en su dominio.

2.* **(10 p.)** Sea H la función definida por $H(x) = \frac{2x^2-2}{x^2-2x-3}$. (Note que la función H es la misma que la del ejercicio 3 de la segunda parte de esta evaluación).

(a) Determine los puntos de discontinuidad de H y su clasificación.

(b) Obtenga los intervalos de continuidad de la función H.

(c) Diga cómo redefiniría a la función H en las discontinuidades removibles, en caso de haberlas, a fin de que sea continua en tales puntos.

3.* **(15 p.)** Sea f la función definida como $f(x) = \sqrt{2x+3}$.

(a) Calcule $f'(3)$ usando la definición.

(b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(3, f(3))$.

4. Sea G la función tal que $G(x) = 10x - 5 + \cos(x)$. Pruebe que G tiene al menos un cero o raíz en el intervalo $[0, \pi]$.

Introducción al Cálculo | Martes, 13 de agosto de 2016.

Universidad Autónoma Metropolitana - Azcapotzalco

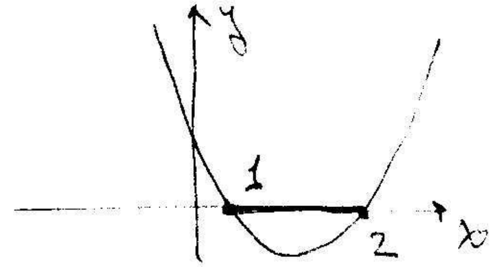
Examen Global. Otoño 2016.

PRIMERA PARTE

(1) (a) $x^2+3x-5 \geq 2x^2-3$

$0 \geq x^2-3x+2$

$0 \geq (x-2)(x-1)$



Solution: $[1,2]$

(b) $\dfrac{3+x}{5-2x} \leq 3$

$\dfrac{3+x}{5-2x} - 3 \leq 0$

$\dfrac{3+x-15+6x}{5-2x} \leq 0$ $\Rightarrow$ $\dfrac{7x-12}{5-2x} \leq 0$

Caso (i) $\boxed{5-2x > 0}$

$\Rightarrow 7x-12 \leq 0$

$x \leq \dfrac{12}{7}$.

y $5-2x>0 \Rightarrow \dfrac{5}{2} > x$.

ie $x < \dfrac{5}{2}$

Since: $\dfrac{12}{7} < \dfrac{5}{2}$

Then: $x \leq \dfrac{12}{7}$

$\left(-\infty, \dfrac{12}{7}\right]$

Caso (ii) $\boxed{5-2x<0}$

$7x-12 \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{12}{7}$

and $\dfrac{5}{2} < x$.

Since. $\dfrac{12}{7} < \dfrac{5}{2}$

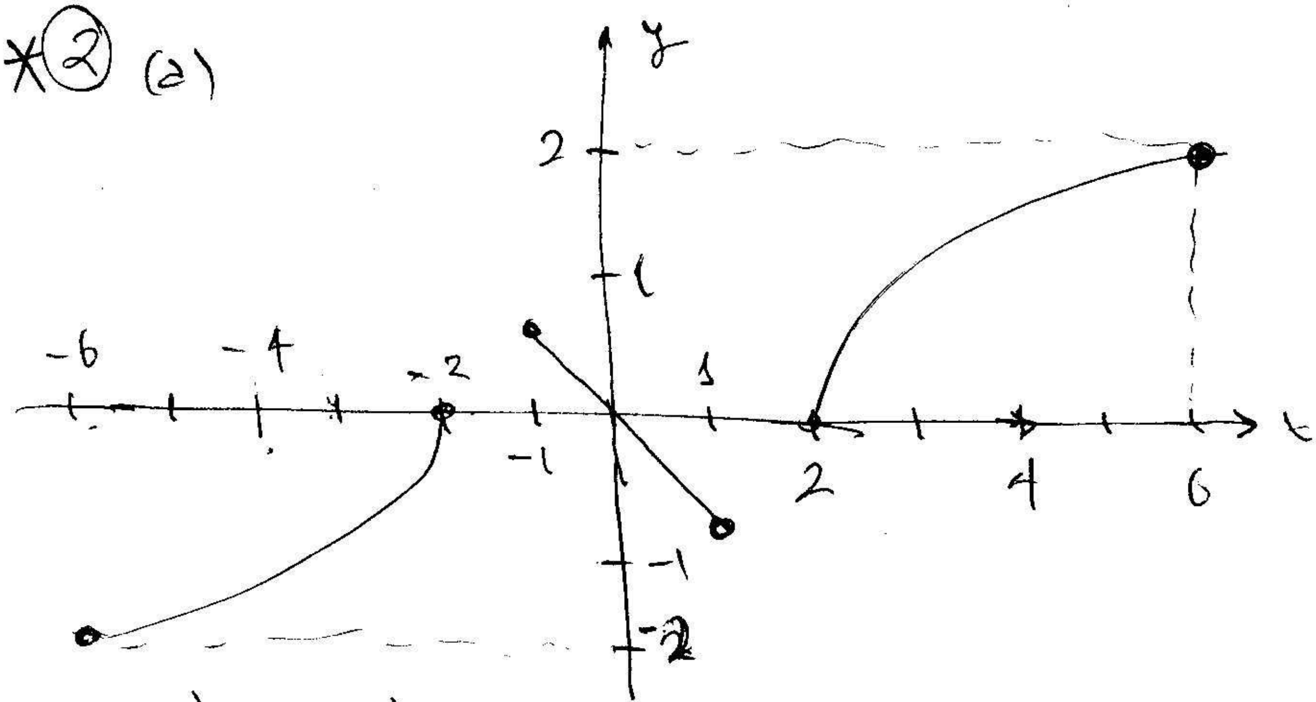
$\dfrac{5}{2} < x$.

$\Rightarrow \left(\dfrac{5}{2}, \infty\right)$

Conjunto solución.

$\left(-\infty, \dfrac{12}{7}\right] \cup \left(\dfrac{5}{2}, \infty\right)$.

*② (a)



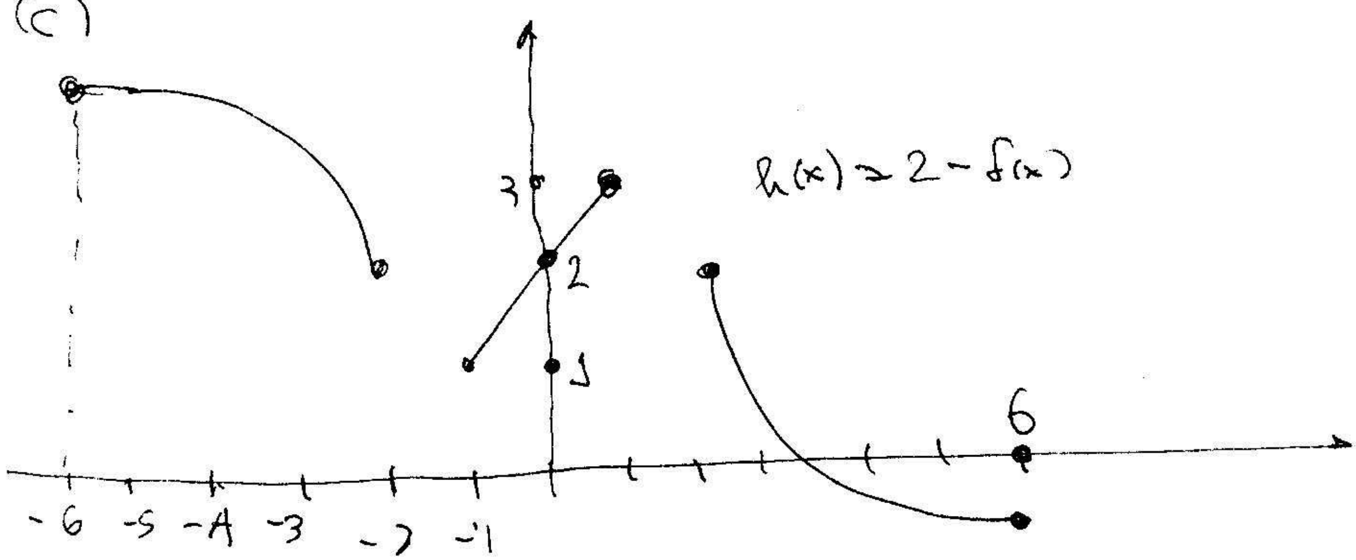
(b) $Dom(f) = [-6, -2] \cup [-1, 1] \cup [2, 6]$.

$Ran(f) = [-2, 2]$

Raíces: $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$.

Es impar.

(c)



* (3) (a) $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\text{Dom}(g) = (-\infty, -4] \cup [+4, \infty)$.

$\text{Dom}(h) = \{x \mid |x| \leq 5\} = [-5, 5]$

(b) $\frac{f}{g}(x) = \frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{5-|x|}}$

$\text{Dom}\left(\frac{g}{h}\right) = (-5, -4] \cup [4, 5)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{g(x) - 5}{g(x)} = \frac{\sqrt{x^2-16} - 5}{\sqrt{x^2-16}}$

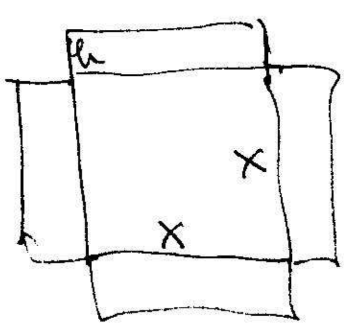
$x \in \text{Dom}(g(x)) = (-\infty, -4] \cup [4, \infty)$

and $g(x) \in \text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

But $g(\pm 4) = 0$.

Thus $\boxed{\text{Dom}(f \circ g) = (-\infty, -4) \cup (4, \infty)}$

* (4)



Area Base $= x^2$

altura $h =$

Volumen $= h x^2 = V_0 = 450\ m^3$

Superficie $= x^2 + 4xh$.

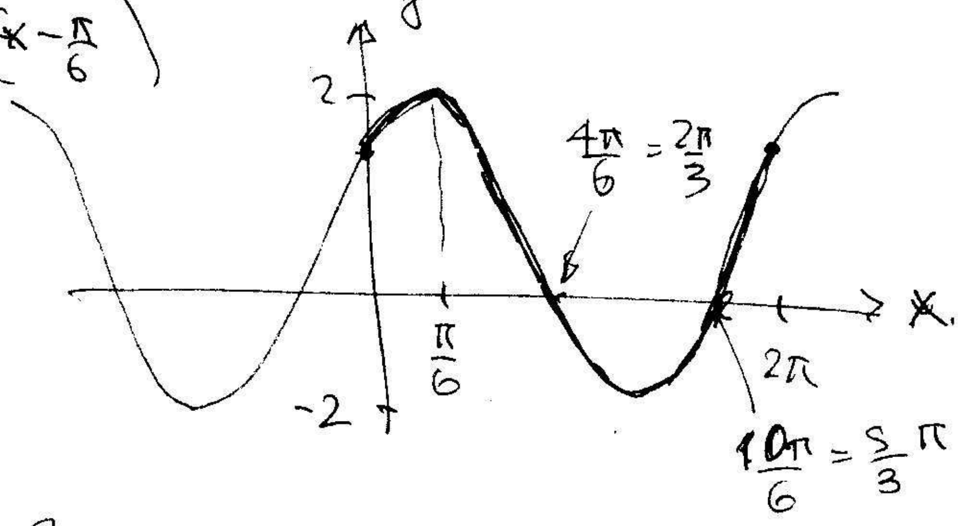
Pero $h = \frac{V_0}{x^2}$

$\Rightarrow S = x^2 + 4x \cdot \frac{V_0}{x^2} \Rightarrow \boxed{S = x^2 + \frac{4V_0}{x}}$

or $\boxed{S = x^2 + \frac{1800}{x}}$

SEGUNDA PARTE

① $g(x) = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ $\longrightarrow \frac{\pi}{6}$ de desplazamiento.



Periodo $= 2\pi$.

amplitud $= 2$. rango $= [-2, 2]$.

② (a) $\lim_{x \to -3} \frac{2 - \sqrt{x^2-5}}{x+3} =$ Indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$".

$$= \lim_{x \to -3} \frac{\left(2 - \sqrt{x^2-5}\right)}{x+3} \frac{\left(2 + \sqrt{x^2-5}\right)}{2 + \sqrt{x^2-5}} = \lim_{x \to -3} \frac{4 - (x^2-5)}{(x+3)\left(2 + \sqrt{x^2-5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{9 - x^2}{(x+3)\left(2 + \sqrt{x^2-5}\right)} = \lim_{x \to -3} \frac{(3-x)(3+x)}{(x+3)\left(2+\sqrt{x^2-5}\right)}$$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{3-x}{2+\sqrt{x^2-5}} = \frac{3+3}{2+\sqrt{9-5}} = \frac{6}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$\boxed{\lim_{x \to -3} \frac{2 - \sqrt{x^2-5}}{x+3} = \frac{3}{2}}$$

2(b) $\lim_{x \to -\infty} \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(4-5/x)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+1/x^2}} =$

$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{|x|} \frac{(4-5/x)}{\sqrt{1+1/x^2}} =$

Since $x \to -\infty \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |x| = -x$.

$= \lim_{x \to -\infty} (-1)\left(\frac{4-5/x}{\sqrt{1+1/x^2}}\right) = (-1)\frac{4-0}{\sqrt{1+0}} = -4$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{4x-5}{\sqrt{x^2+1}} = -4}$$

(e) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1-\cos^3(x)}{\sin^2(x)}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(x))(1+\cos x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos^2 x)}{\sin^2 x} \frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{1+\cos x}$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x}\right)\left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\cos x}\right)$

$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1+\cos x}\right) = \frac{1+1+1}{1+1}$

$= \frac{3}{2}$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^3 x}{\sin^2 x} = \frac{3}{2}}$$

$=5=$.

(3) Considere la función

$$H(x) = \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Se puede escribir como.

$$H(x) = \frac{2(x^2-1)}{x^2-2x-3} = \frac{2(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

(a) Dom(H) $= \mathbb{R} \setminus \{-1, +3\}$

Ceros: $x = 1$ solamente

H puede ser escrito, si $x \neq -1$ como.

$$H(x) = \frac{2(x-1)}{x-3}.$$

Asíntota vertical: $\boxed{x = 3}$

porque $\lim\limits_{x \to 3^\pm} H(x) = \lim\limits_{x \to 3^\pm} \frac{2(x-1)}{x-3} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $\boxed{y = 2}$

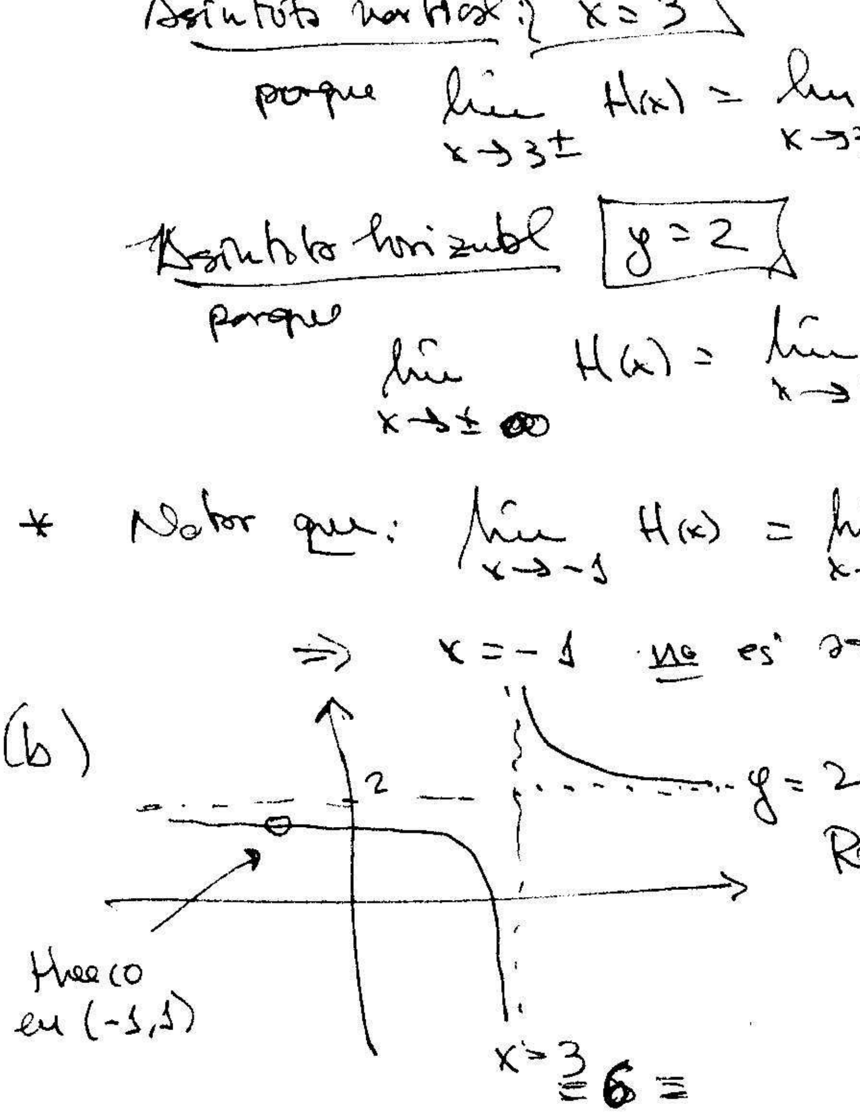
porque

$$\lim_{x \to \pm\infty} H(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2(x-1)}{x-3} = 2$$

* Notar que: $\lim\limits_{x \to -1} H(x) = \lim\limits_{x \to -1} \frac{2(x-1)}{x-3} = \frac{2(-2)}{-4} = 1$

$\Rightarrow$ $x = -1$ no es asíntota.

(b)



Ran(H) $= (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, \infty)$

(c) Es decreciente en cada uno de los siguientes intervalos:

$$(-\infty, -1)$$
$$(-1, 3)$$
$$(3, \infty)$$

---

(4)
$$F(x) = \begin{cases} \cos(2x), & x < -2\pi \\ ax+b, & -2\pi \le x \le \pi \\ \frac{1}{2}\sin(x), & x > \pi \end{cases}$$

We must compute

$$\lim_{x \to -2\pi^-} F(x) = \lim_{x \to -2\pi^-} \cos(2x) = \cos(-4\pi) = 1$$

$$\lim_{x \to -2\pi^+} F(x) = \lim_{x \to -2\pi^+} ax+b = -2a\pi + b$$

$$\lim_{x \to \pi^-} F(x) = \lim_{x \to \pi^-} ax+b = a\pi + b$$

$$\lim_{x \to \pi^+} F(x) = \lim_{x \to \pi^+} \frac{1}{2}\sin x = \frac{1}{2}\sin \pi = 0.$$

Para que $\lim_{x \to -2\pi} F$ exista pedimos: $-2a\pi + b = 1$

y " " $\lim_{x \to \pi} F$ exista pedimos $-a\pi + b = 0$

Entonces $b = a\pi$. $\Rightarrow$ $-2a\pi + (a\pi) = 1 \Rightarrow -a\pi = 1$

$\Rightarrow \boxed{a = -\frac{1}{\pi}}$ y $b = a\pi$ $b = -\frac{1}{\pi}\pi = -1$

$$\boxed{b = -1}$$

TERCERA PARTE.

(1) $$h(x) = \begin{cases} 5-2x & , \quad x \leq -1 \\ ax^2+bx+1 & , \quad -1<x<1 \\ 2x-1 & \quad x \geq 1 \end{cases}$$

We have $Dom(h) = (-\infty, \infty)$.

Notice that $h(x)$ is continuous on $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$ and $(1,\infty)$ separately.

(1) To have $h(x)$ continuous on $x=-1$, we require

(a) $h(-1) = 5-2(-1) = 7$ to exist

(b) $\lim\limits_{x\to -1} h(x)$ to exist

We require the lateral limits to exist and coincide.

$\lim\limits_{x\to -1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^-} 5-2x = 7$ which coincides with $h(-1)$

$\lim\limits_{x\to -1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} ax^2+bx+1 = a-b+1$

which should coincide ~~with~~ $7 = a-b+1$

(c) Then, limit and $h(-1)$ should coincide to have continuity at $x=-1$:

$$h(-1) = 7 = a-b+1$$

(2) To have continuity on $x=1$ we require

(a) $h(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$ to exist.

(b) $\lim\limits_{x\to 1} h(x)$ to exist.

We ~~require~~ lateral limits to exist and coincide.

$\lim\limits_{x\to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} ax^2+b+1 = a+b+1$

$\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 2x-1 = 2\cdot 1-1 = 1$ which $= 8 =$ coincides with $h(1)$.

and they should coincide:

$$a + b + 1 = 1$$

and the limit exist.

(c) The limit and $h(1)$ should coincide: $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$

$\lim_{x\to 1} h(x) = h(1) \Rightarrow a+b+1 = 1.$

Then the function is continuous if a and b solve the equations:

$$\left.\begin{aligned} a-b+1 &= 7 \\ a+b+1 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a-b &= 6 \\ a+b &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow b = -a \Rightarrow a-(-a) = 6 \Rightarrow 2a = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{a=3} \text{ and } \boxed{b=-3}$$

thus

$$h(x) = \begin{cases} 5-2x, & x \le -1 \\ 3x^2-3x+1, & -1 < x < 1 \\ 2x-1, & x \ge 1 \end{cases}$$

is continuous on $\mathbb{R}$.

---

(2) $H(x) = \dfrac{2x^2-2}{x^2-2x-3}.$

(a) We find $H(x) = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{(x-3)(x+1)}$

$\mathrm{Dom}(H) = \mathbb{R} \setminus \{-1, +3\}$

$x = -1$ is a removable discontinuity

$x = 3$ is an infinity discontinuity.

(b) H is continuous on $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ and $(3, \infty)$

(c) The discontinuity at $x = 3$ is infinity and $H(x)$ will be discontinuous there always.

Now: $$\tilde{H}(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x = -1 \\ \dfrac{2x^2-2}{x^2-2x-3}, & \text{if } x \neq -1. \end{cases}$$

Then $\tilde{H}(x)$ is now continuous at. $x = -1$

Or, simply: $$\tilde{H}(x) = \frac{2(x-1)}{x-3}.$$

---

3 (a) By defn of derivative:

$$f'(3) = \lim_{h\to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2(3+h)+3} - \sqrt{2\cdot 3+3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2h+9} - \sqrt{9}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2h+9} - 3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2h+9} - 3)(\sqrt{2h+9}+3)}{h\,(\sqrt{2h+9}+3)} = \lim_{h\to 0} \frac{(2h+9)-3^2}{h(\sqrt{2h+9}+3)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h(\sqrt{2h+9}+3)} = \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{2h+9}+3} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{3} \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{3}$$

(b) The point is $(3, f(3)) = (3, \sqrt{2\cdot 3+3}) = (3, \sqrt{9}) = (3,3)$.

Then the eqn is.

$$\boxed{y - 3 = \frac{1}{3}(x-3)} \quad \text{or} \quad y = \frac{1}{3}x - 1 + 3$$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}x + 2}.$$

(4) Notice that $G(0) = 0 - 5 + \cos(0) = -5 + 1$

ie. $G(0) = -4$

$$G(\pi) = 10\pi - 5 + \cos(\pi) = 10\pi - 5 - 1 = 10\pi - 6.$$

$$\cong 31.4159\ldots - 6 = 25.4159\ldots$$

Notice that $G(0) < 0 < G(\pi)$.

Then, there exist an $x_0 \in (0,\pi)$, because $G(x)$ is continuous on $[0,\pi]$, such that

$$G(0) < G(x_0) = 0 < G(\pi),$$

ie. $G(x_0) = 0$, ie:

ie. $10x_0 - 5 + \cos x_0 = 0$

ie. x_0 is root of $G(x)$