CÁLCULO DIFERENCIAL Examen #2-B | Viernes 7 de julio 2017

① En el tiempo $t=0$, estoy en mi casa en Garibaldi. T minutos después, regresé a mi casa. Si $x(t)$ es mi posición al tiempo t, y mi casa está en la posición $x_0=0$. Entonces:

$$x(0)=0 \quad y \quad x(T)=0.$$

Como mi posición y velocidad son continuos, por el T. de Rolle, hay un instante t_0, tal que.

$$\dot{x}(t_0)=0.$$

Es decir, el velocímetro marca velocidad $=0$ m/seg, ó 0 m/min, aunque no sé qué instante.

---

② $$g(x)=\frac{1-x^2}{x^2}$$

(a) • La funcion $g(x)$ es par: $g(-x)=\frac{1-(-x)^2}{(-x)^2}=\frac{1-x^2}{x^2}=g(x)$

• $\mathrm{Dom}(g)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, por tanto no cruza el eje Y.

• $g(x)=0$, si $1-x^2=0$, entonces $\boxed{x=\pm 1}$, corta eje X.

(b) Como $\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{1-x^2}{x^2}=\infty$, entonces $\boxed{x=0}$ (Eje Y) es asíntota vertical

Como $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^2}{x^2}=-1$, entonces $\boxed{y=-1}$ es asíntota horizontal.

(c) Hay que calcular la derivada. Notar que:

$g(x)=\frac{1}{x^2}-1$. Entonces: $\frac{dg}{dx}=-\frac{2}{x^3}$

(a) No hay fronteras

(b) $g'(x)$ no existe en $x=0$, pero $x \notin Dom(g)$.

(c) $g'(x)=0$, nunca. No es posible $g'(x)=0$.

$\left(-\frac{2}{x^3} \neq 0, \text{siempre}\right)$ No hay puntos críticos

(d) Monotonía: Si $x<0$, $\frac{dg}{dx} = -\frac{2}{x^3} > 0$, entonces $g \nearrow$

Si $x>0$, $\frac{dg}{dx} = -\frac{2}{x^3} < 0$, entonces $g \searrow$

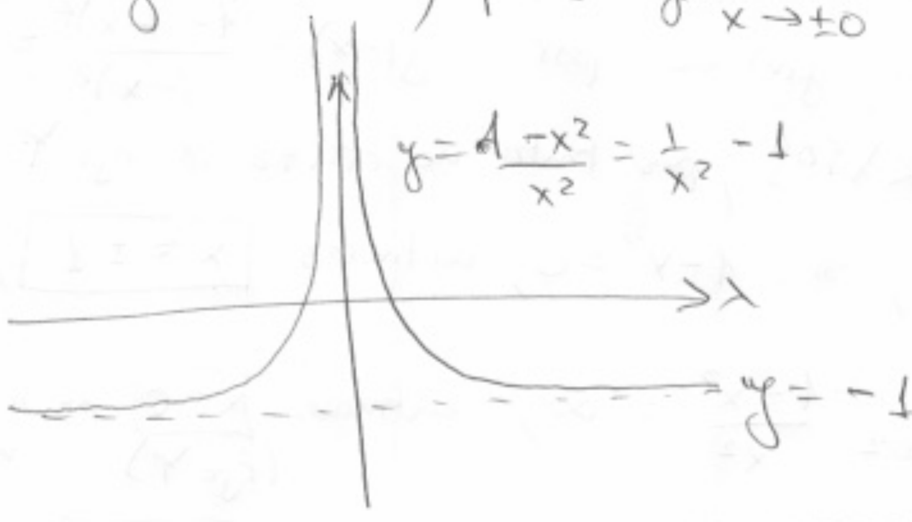
(e) Concavidad. Hay que calcular $\frac{d^2g}{dx^2} = \frac{6}{x^4} > 0$, $\forall x \in Dom(g)$

Entonces $g(x)$ siempre es cóncava hacia arriba

(f) No hay puntos de inflexión, pues no hay cambio de concavidad

(g) No hay extremos, pues $g \xrightarrow[x \to \pm 0]{} \infty$, y $g \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 1$.

(h)



---

(3) El envase tiene un Volumen $V = x^2 y$.

La superficie es de $S = 2x^2 + 4xy = S_0 = 1\ m^2$

Entonces $y = \frac{S_0 - 2x^2}{4x}$

Substituyendo en el volumen, obtenemos,

$$V(x) = x^2\left(\frac{S_0 - 2x^2}{4x}\right) = \frac{x}{4}\left(S_0 - 2x^2\right)$$

Hay que maximizarlo.

$$Dom(V) = \left[0, \sqrt{\frac{S_0}{2}}\right], \quad \text{pues} \begin{cases} x^2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ \text{y además} \begin{cases} S_0 - 2x^2 \geq 0 \\ \Rightarrow \frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{2}} \geq x \end{cases} \end{cases}$$

<u>Puntos críticos.</u>

(a) $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{S_0}{2}}$

(b) $V'(x) = \left(\frac{S_0}{4} - \frac{1}{2}x^2\right) + x(-x) = \frac{S_0}{4} - \frac{3}{2}x^2$

$V'(x) = \frac{S_0 - 6x^2}{4}$ $V'(x)$ siempre existe

(c) $V'(x) = 0$ si $\frac{S_0}{4} - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x_0 = \sqrt{\frac{S_0}{6}}$

Hay tres puntos críticos $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\frac{S_0}{6}}$, $x_3 = \sqrt{\frac{S_0}{2}}$

Entonces, si $x \in \left[0, \sqrt{\frac{S_0}{6}}\right]$, $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{S_0}{6}}$

$$\Rightarrow x^2 \leq \frac{S_0}{6} \Rightarrow 0 \leq S_0 - 6x^2 \Rightarrow 0 \leq V'(x)$$
$$\Rightarrow V \nearrow \text{ en } \left[0, \sqrt{\frac{S_0}{6}}\right]$$

Si $x \in \left[\sqrt{\frac{S_0}{6}}, \sqrt{\frac{S_0}{2}}\right]$, $S_0 - 6x^2 \leq 0 \Rightarrow V'(x) \leq 0$
$$\Rightarrow V \searrow$$

$\boxed{\text{Entonces } V\left(\sqrt{\frac{S_0}{6}}\right) \text{ es el máximo volumen}}$ en $\left[\sqrt{\frac{S_0}{6}}, \sqrt{\frac{S_0}{2}}\right]$

$x = \sqrt{\frac{S_0}{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$ m

$$y = \frac{1 - 2x^2}{4x} = \frac{1 - 2(1/6)}{4(1/\sqrt{6})} = \frac{(2/3)}{4/\sqrt{6}} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ m}$$

los dimensiones son.

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ metros} \\ y &= \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ metros} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ metros.} \end{aligned}}$$

Entonces, las dimensiones deben ser un cubo de volumen $x^2 y = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{6\sqrt{6}}\ m^3.$

CÁLCULO DIFERENCIAL Examen #2-A | Viernes 7 de julio de 2017.

① Al tiempo $t=0$, me encuentro en la CDMX. Al tiempo $t=31$ hrs, me encuentro en Atlanta, GA. Si $x(t)$ es mi posición al tiempo t, entonces:

$$x(0)=0 \qquad x(31)=3100 \text{ km}.$$

Como $x(t)$ es una función continua y derivable en el intervalo $[0,31]$, se cumplen las hipótesis del Teorema del Valor medio,

$$\dot{x}(\tau) = \frac{x(31)-x(0)}{31 \text{ hrs}} = \frac{3100}{31} = 100 \frac{\text{km}}{\text{hr}}$$

en donde τ es algún instante entre 0 y 31 hr. Es decir, en algún momento el velocímetro marcó 100 km/hr

---

② $f(x) = \dfrac{x^2}{9+x^2}$. Notar que: $f(x) = 1 - \dfrac{9}{9+x^2}$

(a) • f es par: $f(-x) = \dfrac{(-x)^2}{9+(-x)^2} = \dfrac{x^2}{9+x^2} = f(x)$

• $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

• $f(0)=0$

$f(x)=0$, si $\dfrac{x^2}{9+x^2}=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow \underline{x=0}$

Solo cruza los ejes en el origen.

(b) Como $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 1 - \dfrac{9}{9+x^2} = 1 \Rightarrow \boxed{y=1 \text{ asíntota horizontal}}$

Como $\mathrm{Dom}(f)=\mathbb{R}$, no hay asíntotas verticales.

- 1 -

(c) Hay que calcular derivadas:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}\left(1 - \frac{9}{9+x^2}\right) = (-9)\,\frac{(-1)}{(9+x^2)^2}\,(2x)$$

i.e. $$\frac{df}{dx} = 18\,\frac{x}{(9+x^2)^2}$$

(a) No hay fronteras.

(b) $f'(x)$ siempre existe.

(c) $f'(x) = 0$, sólo en $x=0$, y es el único punto crítico.

(d) Monotonía

Si $x>0$, $\frac{df}{dx}>0 \Rightarrow f \nearrow$ en $[0,\infty)$

Si $x<0$, $\frac{df}{dx}<0 \Rightarrow f \searrow$ en $[-\infty,0]$

(e) Concavidad $$\frac{d^2f}{dx^2} = 18\left(\frac{(9+x^2)^2\cdot 1 - x\,2(9+x^2)2x}{(9+x^2)^4}\right)$$

i.e. $$\frac{d^2f}{dx^2} = 18\,\frac{x^4+2\cdot 9x^2+81-36x^2-4x^4}{(9+x^2)^4}$$

$$= -18\,\frac{3x^4+18x^2-81}{(9+x^2)^4} = -18\cdot 3\,\frac{(x^4+6x^2-27)}{(9+x^2)^4}$$

$$= -18\,\frac{(x^2-3)(x^2+9)}{(x^2+9)^2}$$

If $x^2>3$ (i.e. $|x|>\sqrt{3}$), $f''<0$, then f is downwards concave in $(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},\infty)$

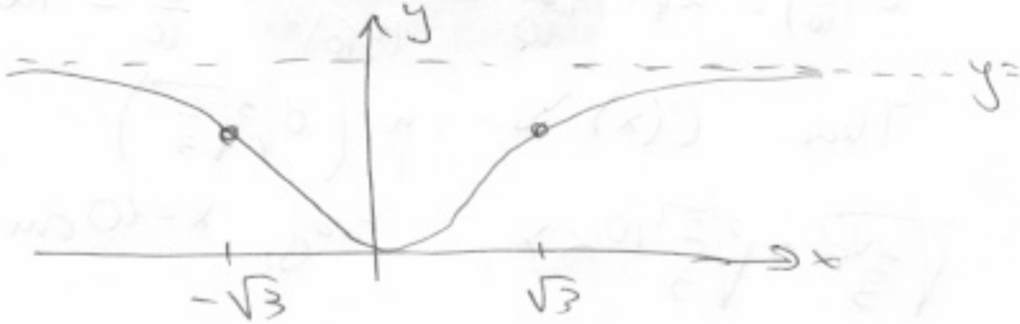
If $x^2<3$ (i.e. $|x|<\sqrt{3}$), $f''>0$, then f is upwards concave in $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$.

(f) There are two inflexión points at $x=-\sqrt{3}$, $x=+\sqrt{3}$.

(g) From part (d), there is an absolute minimum at $x=0$, which is $f(0)=0$

There is no maximum, since $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$

(h)

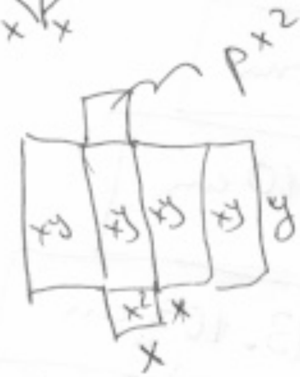


---

(3) The dimensions are as in the figure, x, x, y:

The cost of the container is

$$C = p\,x^2 + q\left(x^2 + 4xy\right)$$



$p = 2$¢$/cm^2$

$q = 1$¢$/cm^2$

The volume is $x^2 y = V_0 = (10\,cm)^3 = 10^3\,cm^3$

Then $y = \dfrac{V_0}{x^2}$.

Hence, the cost as function of x:

$$C(x) = px^2 + q\left(x^2 + 4x\frac{V_0}{x^2}\right) = (p+q)x^2 + \frac{4qV_0}{x}.$$

$Dom(C) = (0,\infty)$.

$$C'(x) = 2(p+q)x - \frac{4qV_0}{x^2}.$$

Critical points.

(a) There is no boundary.

(b) $C'(x)$ exists on $(0,\infty)$.

(c) $C'(x)=0$ if $x = \sqrt[3]{\dfrac{2qV_0}{(p+q)}}$

$x_0 = \sqrt[3]{\frac{2V_0}{3}}$

If $x < \sqrt[3]{\frac{2V_0}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,10$, say $x = \frac{1}{10}$

$$C'\left(\tfrac{1}{10}\right) = 2(p+q)\frac{1}{10} - \frac{4qV_0}{(1/10)^2} = \frac{6}{10} - 100 \cdot 4 \cdot 10^3 < 0$$

Then $C(x) \searrow$ in $\left(0, \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$.

If $\sqrt[3]{\frac{2V_0}{3}} = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,10 < x$, say $x = 10$ cm

$$C'(10) = 2(p+q)10 - \frac{4qV_0}{(10)^2} = 60 - \frac{4 \cdot 10^3}{100} > 0$$

Then $C(x) \nearrow$ in $\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,10, \infty\right)$

Hence $C\left(\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right)$ is an <u>absolute</u> <u>minimum</u>

$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,10 \text{ cm}}$ $\boxed{x \approx 8.73 \text{ cm}}$

and $y = \frac{V_0}{x^2} = \frac{10^3 \text{ cm}^3}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2/3} 10^2 \text{ cm}^2}$ $\boxed{y = \left(\frac{3}{2}\right)^{2/3} 10 \text{ cm}}$

$\boxed{y \approx 13.103 \text{ cm}}$