(I M) + (I V) 1/3

1.a.M $f'(x) = x \sec^2(2\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} + \tan(2\sqrt{x}))$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x}\sec^2(2\sqrt{x}) + \tan(2\sqrt{x})$$

1.b.M $g'(x) = \dfrac{\dfrac{\cos^3 x + x\, 3\cos^2 x \operatorname{sen} x}{\cos^6 x}}{2\sqrt{7+\dfrac{x}{\cos^3 x}}} = \dfrac{\cos x + 3x \operatorname{sen} x}{2\cos^4 x\sqrt{7+\dfrac{x}{\cos^3 x}}}$

1.c.M $h'(x) = 2\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{1+\cos^2 x}\right)\cdot\dfrac{(1+\cos^2 x)(2\operatorname{sen} x(\cos x) + \operatorname{sen}^2 x\,(2\cos x)\operatorname{sen} x}{(1+\cos^2 x)^2}$

$$= \frac{4\operatorname{sen}^2 x}{(1+\cos^2 x)^3}\cdot(\operatorname{sen} x\cos x + \operatorname{sen} x\cos^3 x + \cos x \operatorname{sen}^3 x)$$

2.a.M

$$\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 0\ ; \quad \frac{\pi}{2}\cos 2\frac{\pi}{4} = 0$$

2.b.M $x\cos 2y\, 2\dfrac{dy}{dx} + \operatorname{sen} 2y = y(-\operatorname{sen} 2x)(2) + \dfrac{dy}{dx}\cos 2x$

$$\frac{dy}{dx}(2x\cos 2y - \cos 2x) = -2y\operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2y$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)} = \left.\frac{2y\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y}{\cos 2x - 2x\cos 2y}\right|_{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= 2$$

$\therefore$

$$y - \frac{\pi}{2} = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

3.M ~~[illegible]~~ $\text{dist}(pol) = 25 - 20t$

$\text{dist}(lad) = 16t$

$\therefore \quad \text{dist}(pol, lad) = \sqrt{(25-20t)^2 + (16t)^2}$

$$\therefore \left.\frac{d}{dt}\left[\text{dist}(pol, lad)\right]\right|_{t=0.5} = \left.\frac{-1000 + 1112t}{2\sqrt{(25-20t)^2 + (16t)^2}}\right|_{t=0.5}$$

$$= \frac{-1000 + 556}{2\sqrt{15^2 + 8^2}} = -\frac{222}{17}$$

CÁLCULO DIFERENCIAL Parte II Matutino - 17P..

① $\frac{dg}{dx} = 2\cos x(\sin x + 1), \quad x \in [0, 2\pi]$

1.(a) Puntos críticos: (i) $x = 0$, $x = 2\pi$ son puntos en la frontera

(ii) $g'(x)$ siempre existe

(iii) $g'(x) = 0$ en $x = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$

Si $g'(x) = 0$. entonces $\cos x = 0$ ó $\sin x = -1$.

- $\cos x = 0$ implica $x = \frac{\pi}{2}$ ó $x = 3\frac{\pi}{2}$
- $\sin x = 0$ implica $x = \cancel{0}, \pi, \cancel{2\pi}$.

Puntos críticos: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $x_3 = \pi$, $x_4 = \frac{3}{2}\pi$, $x_5 = 2\pi$

1.(b) $x \in (0, \frac{\pi}{2})$; $\cos x > 0$, $\sin x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{dg}{dx} > 0 \Rightarrow g$ creciente

$x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$; $\cos x < 0$, $\sin x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{dg}{dx} < 0 \Rightarrow g$ decreciente

$x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$: $\cos x < 0$, $\sin x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{dg}{dx} < 0 \Rightarrow g$ decreciente

$x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$: $\cos x > 0$, $\sin x + 1 > 0 \Rightarrow \frac{dg}{dx} > 0 \Rightarrow g$ creciente

Entonces:

Si $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, g es creciente

Si $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, g es decreciente

Si $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$, g es decreciente

Si $x \in (\frac{3}{2}\pi, 2\pi)$, g es creciente

1c) Así pues, $g(0)$ es un mínimo local

$g(\frac{\pi}{2})$ es un máximo local

$g(\frac{3\pi}{2})$ es un mínimo local

$g(2\pi)$ es un máximo local

---

(2) Sea la función $f(x) = \dfrac{x^2}{9-x^2}$

(a) $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{+3, -3\}$.

Raíces: $f(x) = 0$ en $x=0$ solamente.

(b) Dado que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^{\pm}} f(x) = \pm\infty \\ \lim\limits_{x \to +3^{\pm}} f(x) = \mp\infty \\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -1 \end{array}\right\}$$

entonces $x=-3$, $x=+3$ son asíntotas verticales

mientras que $y=-1$. es su asíntota horizontal.

(c) Debemos calcular $f'(x)$.

Notar que: $f(x) = -1 + \dfrac{9}{9-x^2}$

Entonces $f'(x) = \dfrac{18x}{(9-x^2)^2}$.

Puntos críticos
- $f'(x)$ no existe en $x = \pm 3$
- $f'(x) = 0$ en $x=0$
- No hay frontera

Puntos críticos $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

(d) Intervalos de monotonía:

$$f'(x) = \frac{18x}{(9-x^2)^2} < 0, \text{ si } x<0 \quad (y\ x \neq -3).$$

$$f'(x) = \frac{18x}{(9-x^2)^2} > 0, \text{ si } x>0 \quad (y\ x \neq 3).$$

Entonces, f es decreciente en $(-\infty,-3)$ y en $(-3,0)$.

f es creciente en $(0,3)$ y en $(3,\infty)$.

(e). Intervalos de concavidad Hay que calcular $f''(x)$

$$f''(x) = \frac{(9-x^2)^2\,18 - 18x\left(2(9-x^2)(-2x)\right)}{(9-x^2)^4}$$

$$= \frac{18(9-x^2)^2 + 4\cdot 18\,x^2(9-x^2)}{(9-x^2)^4}$$

$$= \frac{18\,(9-x^2)\left[(9-x^2)+4x^2\right]}{(9-x^2)^4}$$

$$f''(x) = (3\cdot 18)\left(\frac{3+x^2}{(9-x^2)^3}\right).$$

Entonces: • puntos de interés: $x=+3$, $x=-3$.

• $f''(x) \neq 0$ siempre

Como el numerador es positivo:

$f''(x) < 0$, $x < -3$ $\Rightarrow$ f cóncava hacia abajo

$f''(x) > 0$, $-3 < x < 3$. $\Rightarrow$ f cóncava hacia arriba

$f''(x) > 0$, $x > 3$ $\Rightarrow$ f cóncava hacia abajo

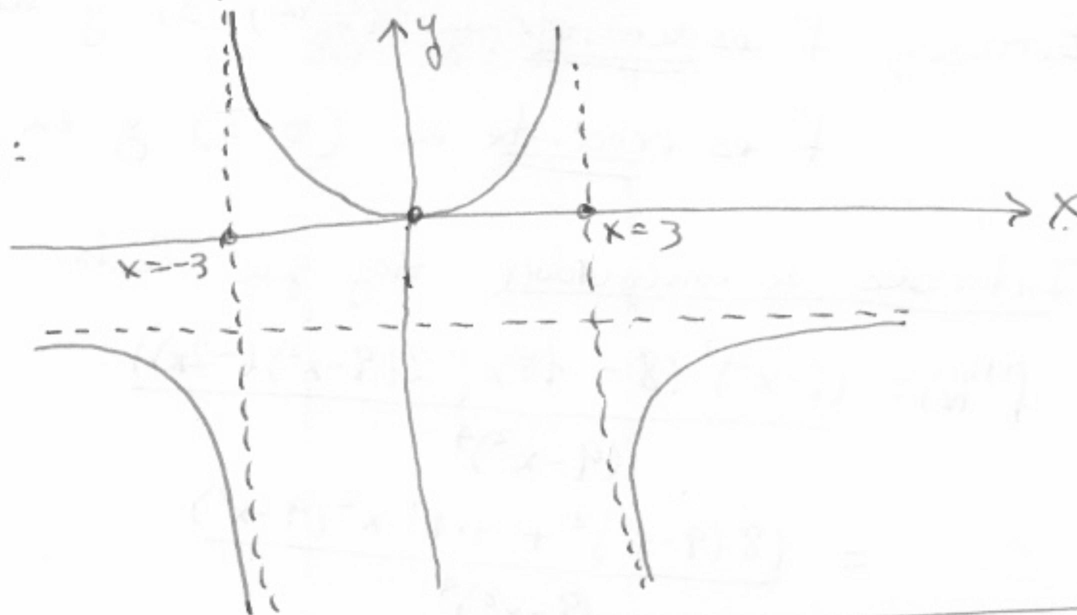
(f) Como $x=-3$ y $x=+3$ $\notin \mathrm{Dom}(f)$, no hay puntos de inflexión

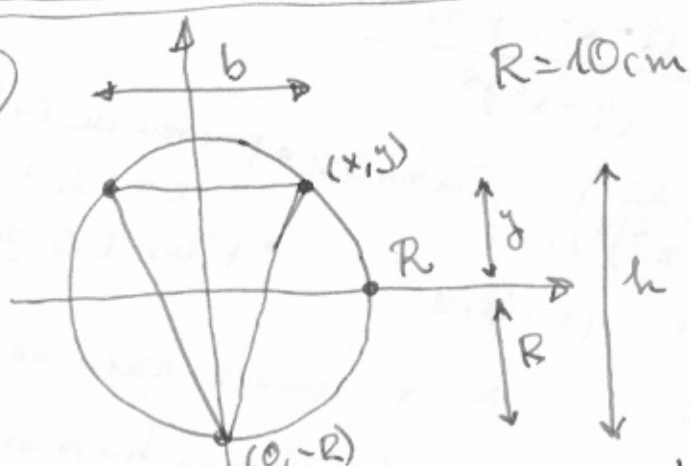
(g) Como tiene asíntotas verticales, no hay extremos absolutos, pues $\lim_{x\to \pm 3^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

En el intervalo $(-\infty, -3)$ no hay extremos locales, pues. f es decreciente siempre y $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -1$

En el intervalo $(-3,3)$, f es decreciente en $(-3,0)$ y creciente en $(0,3)$. Entonces $f(0)$ es un mínimo local

(h) Gráfica:



3) 

R=10cm El triángulo tiene base

$b = 2x$

y altura

$h = R+y$

Area del triángulo $A = \dfrac{b \cdot h}{3} = \dfrac{2x(R+y)}{3}$

Tenemos la restricción: $x^2+y^2 = R^2$

$x = \sqrt{R^2-y^2}$, $y \in [-R,R]$

Donde x siempre es positivo

$\cancel{A} =$

Entonces: $A(y) = \frac{2}{3}(R+y)\sqrt{R^2-y^2}$

$Dom(A) = [-R, R]$.

$A(y)$ es continua en $Dom(A)$.

$A(R) = A(-R) = 0$

Ahora: $\frac{dA}{dy} = \frac{2}{3}\left(\sqrt{R^2-y^2} - \frac{(R+y)\,y}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{(R^2-y^2) - Ry - y^2}{\sqrt{R^2-y^2}}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{R^2 - Ry - 2y^2}{\sqrt{R^2-y^2}}$$

Puntos críticos: (a) $y = -R$, $y = +R$: puntos frontera.

(b) $A'(y)$ no existe en $y_1 = -R$, $y_4 = R$

(c) $A'(y) = 0$ en $y_2 = -R$, $y_3 = \frac{1}{2}R$.

$2y^2 + Ry - R^2 = 0$, $\quad y = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\cdot 2\cdot(-R^2)}}{2\cdot 2}$

$$y = \frac{-R \pm 3R}{4} = \begin{cases} \frac{1}{2}R \\ -R \end{cases}$$

Pts críticos: $y_1 = -R$, $y_3 = \frac{1}{2}R$, $y_4 = R$.

Dos intervalos: $(-R, \frac{1}{2}R)$ y $(\frac{1}{2}R, R)$.

En $(-R, \frac{1}{2}R)$, $y = 0$: $\frac{dA}{dy}(0) = \frac{2}{3}\frac{R^2}{\sqrt{R^2}} = \frac{2}{3}R > 0$

$\Rightarrow \frac{dA}{dy}(y) > 0$ en $(-R, \frac{1}{2}R)$ y $A(y)$ creciente

En $(\frac{1}{2}R, R)$, $\frac{dA}{dy}(y) < 0 \Rightarrow A(y)$ decreciente.

Entonces $A(\frac{1}{2}R)$ es absoluto;

Como $A(y) = \frac{2}{3}(R+y)\sqrt{R^2-y^2}$

Entonces:

$$A(\tfrac{1}{2}R) = \frac{2}{3}\left(R+\frac{1}{2}R\right)\sqrt{R^2-\frac{1}{4}R^2} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}R\right)\sqrt{\frac{3}{4}R^2}$$

i.e. $\boxed{A(\tfrac{1}{2}R) = \frac{\sqrt{3}}{2}R^2 \text{ es el área máxima}}$

Un lado es la base $b = 2x. = 2\sqrt{R^2-y^2} = 2\sqrt{R^2-\frac{1}{4}R^2}$

$= 2\sqrt{\frac{3}{4}R^2} = 2\frac{\sqrt{3}R}{2} = \sqrt{3}R \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{3}R}$ y $x = \frac{\sqrt{3}}{2}R$

El otro lado tiene longitud:

$$d((x,y),(0,-R)) = \sqrt{(x-0)^2+(y+R)^2} = \sqrt{x^2+(y+R)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}R^2+\left(\frac{1}{2}R+R\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{4}R^2}$$

$$= \sqrt{3}R$$

Se trata de un triángulo equilátero.

Cálculo Diferencial III Parte Matutino 17P

1) a) $y = (\arccos(3x^2))^{\operatorname{sen} x}$

$\ln y = \operatorname{sen} x \ln(\arccos(3x^2))$

derivando

$$\frac{y'}{y} = \operatorname{sen} x \frac{1}{\arccos(3x^2)}\left(-\frac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}\right) + \ln(\arccos(3x^2)) \cos x$$

$$y' = (\arccos(3x^2))^{\operatorname{sen} x}\left[\cos x \ln(\arccos(3x^2)) - \frac{6x \operatorname{sen} x}{\arccos(3x^2)\sqrt{1-9x^4}}\right]$$

1b)

$$y = \frac{1}{3}\ln(2x^2+3) - \frac{1}{2}\ln(5x^2+3)$$

$$y' = \frac{4x}{3(2x^2+3)} - \frac{10x}{2(5x^2+3)}$$

1c) $y = \operatorname{sen}(e^{x^3+x})$

$$y' = \cos(e^{x^3+x}) \cdot e^{x^3+x} \cdot (3x^2+1)$$

2) $F(x) = \dfrac{2x}{\ln x}$

a) Dom F: $(0,1) \cup (1,\infty)$ cero no tiene

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} 2x \dfrac{1}{\ln x} = 0^-$

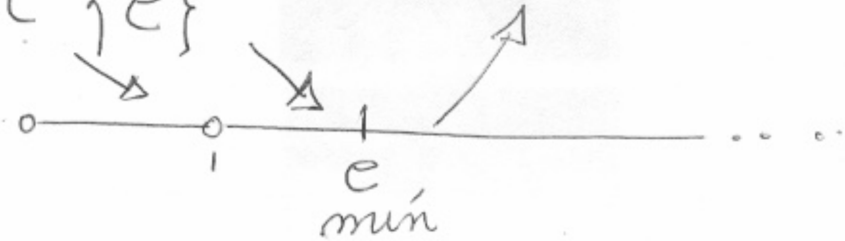
$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x}{\ln x} \overset{L'Hopital}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x \to \infty} 2x = \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{2x}{\ln x} = \dfrac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x}{\ln x} = \dfrac{2}{0^+} = \infty \end{array}\right\} \therefore \text{A.V } x=1$$

Cálculo Diferencial. III Parte Matutino 17P

2c) $F'(x) = \dfrac{2\ln x - 2x\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{2\ln x - 2}{(\ln x)^2} = \dfrac{2(\ln x - 1)}{(\ln x)^2}$

P.C $\{e\}$



3) $f(x) = \csc x$

$f'(x) = -\csc x \cot x$

$f''(x) = -\csc x(-\csc^2 x) - \cot x(-\csc x \cot x) = \csc^3 x + \csc x \cot^2 x$

$f''' = 3\csc^2 x(-\csc x \cot x) + \csc x \, 2\cot x(-\csc^2 x) + \cot^2 x(-\csc x \cot x)$

$= -3\csc^3 x \cot x - 2\csc^3 x \cot x - \csc x \cot^3 x$

$= -5\csc^3 x \cot x - \csc x \cot^3 x$

$f(\pi/3) = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$f'(\pi/3) = -\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2}{3}$

$58^\circ = \frac{58\pi}{180} = \frac{29\pi}{90}$

$f''(\pi/3) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{3} = \frac{8}{3\sqrt{3}} + \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{10}{3\sqrt{3}}$

$f'''(\pi/3) = -5\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{-40}{9} - \frac{2}{9} = -\frac{42}{9}$

$P_3(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}(x - \pi/3) + \frac{10}{6\sqrt{3}}(x - \pi/3)^2 - \frac{42}{9 \cdot 6}(x - \pi/3)^3$

$P_3\left(\frac{29\pi}{90}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{2}{3}\left(-\frac{\pi}{90}\right) + \frac{5}{3\sqrt{3}}\left(-\pi/90\right)^2 - \frac{7}{9}\left(-\pi/90\right)^3$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{135} + \frac{\pi^2}{4860\sqrt{3}} + \frac{7\pi^3}{7{,}362{,}900} = 1.1791735459$

Cálculo Diferencial III Parte Matutino 17P

4) $f(x) = e^{\frac{1}{2}\ln(x-1)^4} = e^{\ln(x-1)^2} = (x-1)^2$

a) Dom $\mathbb{R} - \{1\}$

b) $f'(x) = 2(x-1) > 0$ en $(1, \infty)$ f crece aquí tiene invers

ó

$f'(x) = 2(x-1) < 0$ en $(-\infty, 1)$ f decrece aquí tiene invers

c) $\dfrac{d(f^{-1})}{dy}(e^2) = \dfrac{1}{f'(e+1)} = \dfrac{1}{2e}$ $\qquad f' = 2(x-1)$

$(x, e^2) \rightarrow \cancel{x} - \cancel{1} = e \longrightarrow x = e+1 \qquad f' = 2(e)$

d) $y = (x-1)^2$

$\pm\sqrt{y} = |x-1| = \begin{cases} 1-x = \sqrt{y} & x = 1-\sqrt{y} \\ x-1 = \sqrt{y} & x = \sqrt{y}+1 \end{cases}$

$f = (x-1)^2$ en $(1, \infty)$ su inversa $f^{-1} = \sqrt{y} + 1$

ó

$f = (x-1)^2$ en $(-\infty, 1)$ su inversa $f^{-1} = 1 - \sqrt{y}$