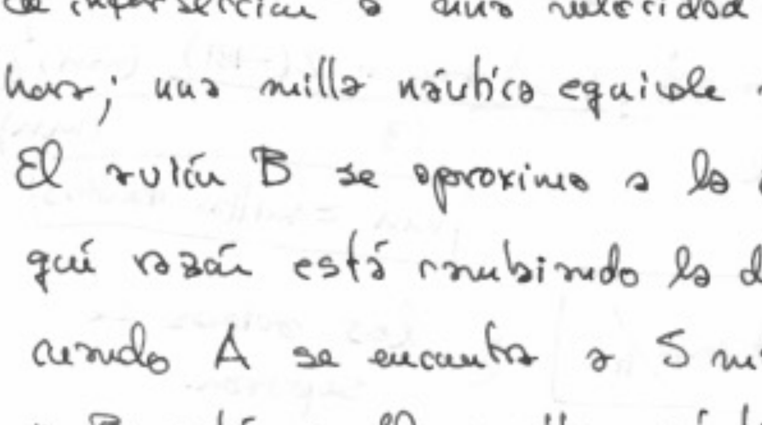
Nombre: ANSWER KEY | Viernes junio 9, 2017

UAM - Azcapotzalco CÁLCULO DIFERENCIAL Cuestionario #4

1. Tráfico aéreo comercial. Dos aviones comerciales están volando a 40,000 pies de altitud a lo largo de trayectorias en línea recta que se cortan en ángulos rectos. El avión A se aproxima al punto de intersección a una velocidad de 442 nudos (millas náuticas por hora; una milla náutica equivale a 2000 yardas, una milla, a 1760 yd). El avión B se aproxima a la intersección a 481 nudos. ¿A qué razón está cambiando la distancia entre los aviones cuando A se encuentra a 5 millas náuticas del punto de intersección y B está a 12 millas náuticas del mismo?

Los 40,000 pies sólo indica que los aviones vuelan en el mismo plano horizontal, que es el siguiente:



De acuerdo al dibujo: $\dot{x} = 442$ millas n/hr.

$\dot{y} = -481$ mn/hr.

La relación entre $x(t)$ y $y(t)$ es

$x^2(t) + y^2(t) = \ell^2(t)$.

Queremos las razones de cambio (tasas) relacionadas;

Calculando su derivada. $\frac{d}{dt}\left(x^2(t) + y^2(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\ell^2(t)\right)$

y usando su derivada. la regla de Cadena. $\frac{d}{dx}x^2 \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{d}{dy}y^2 \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d\ell^2}{d\ell} \cdot \frac{d\ell}{dt}$

$\Rightarrow \boxed{2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2\ell\dot{\ell}}$

= 1 =

Es decir: $\boxed{x\dot{x} + y\dot{y} = l\dot{l}}$ es la ecuación de las tasas de cambio relacionadas.

Cuando $x = -5$ mn, $y = +12$ mn,

$$l = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{25+12^2} = 13 \text{ mn.}$$

Entonces; la tasa de cambio de la distancia entre los aviones es.

$$\dot{l} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{l} = \frac{(-5)\,442 + 12(-481)}{13} \frac{(mn)^2/hr}{(mn)}$$

$\boxed{mn = \text{millas náuticas}}$

$\boxed{\dot{l} = -614 \text{ mn/hr}}$ y los aviones se separan.

Nota. La información 1 milla náutica = 2000 yardas = 1.8288 km
1 milla = 1760 yardas = 1.609344 km.

es información no necesariamente útil para resolver el problema, dado que todo puede ser resuelto en términos de millas náuticas, y millas náuticas por hora (nudos).

Si así lo desean, podemos expresar todo en millas, yardas, o km; pero no es necesario. 1 milla náutica = $\frac{200}{176}$ millas; 1 milla ≈ 1.609 km

$\dot{x} \cong +502.27$ millas/hr. ≈ 808.15 km/hr = 884,000 yd/hr
$\dot{y} \cong -546.$ millas/hr. ≈ −879.48 km/hr = 964,000 yd/hr
$x \cong -5.68$ millas ≈ −9.14 km = 10,000 yd
$y \cong 13.63$ millas ≈ 21.93 km = 24,000 yd
$l \approx 14.77$ millas ≈ 23.76 km = 26,000 yd.

$\boxed{\dot{l} \approx -697.\text{ millas/hr} = 1{,}121.473 \text{ km/hr} = -1{,}228{,}000 \text{ yd/hr}}$

2

Nombre: Answer Key. | Viernes, junio 9, 2017

UAM-Azcapotzalco. Cálculo Diferencial. Cuestionario #4

1. Cambio de dimensiones de una caja rectangular. Supongamos que los lados x, y, z, de una caja rectangular cerrada están cambiando de acuerdo con las sig. razones: $\dot{x} = 1$ m/seg; $\dot{y} = -2$ m/seg; $\dot{z} = 1$ m/seg. Obtenga las razones a las que cambia (a) el volumen, (b) el área superficial, y (c) la longitud de la diagonal $s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, en el instante en que $x = 4$m, $y = 3$m, $z = 2$m

We can compute the volume, superficial area and diagonal length as:

$$V = xyz$$
$$A = 2(xy + yz + zx)$$
$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

We require its change in time: $\frac{dV}{dt} = \dot{x}yz + x\dot{y}z + xy\dot{z}$

$$\frac{dA}{dt} = 2(\dot{x}y + x\dot{y} + \dot{y}z + y\dot{z} + \dot{z}x + z\dot{x}).$$

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z}$$

Simplifying:

$$\frac{dV}{dt} = \dot{x}yz + x\dot{y}z + xy\dot{z}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\left(\dot{x}(y+z) + \dot{y}(x+z) + \dot{z}(x+y)\right)$$
$$\frac{ds}{dt} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{s}.$$

(a) $\frac{dV}{dt} =$ Now: $x = 4\,m$ $\quad \dot{x} = 1\ m/sec$

$y = 3\ m$ $\quad \dot{y} = -2\ m/sec$

$z = 2\ m$ $\quad \dot{z} = 1\ m/sec$

Then,

(a) $\frac{dV}{dt} = 1\cdot 3\cdot 2\ m^3/sec. + 4(-2)\,2\frac{m^3}{sec} + 4\cdot 3(1)\frac{m^3}{sec} = (6 - 16 + 12)\frac{m^3}{sec}$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} = 2\ m^3/sec}$$

(b) $\frac{dA}{dt} = 2\Big(1(3+2) + (-2)(4+2) + 1(4+3)\Big)\ m/sec$

$= 2\ (5 - 12 + 7)\ m/sec$ $\quad \boxed{\frac{dA}{dt} = 0\ m^2/sec}$

(c) $\quad s = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ m = \sqrt{4^2+3^2+2^2}\ m = \sqrt{16+9+4}\ m$

$= \sqrt{29}\ m.$

$\frac{ds}{dt} = \left(\frac{4\cdot 1 + 3(-2) + 2\cdot 1}{\sqrt{29}\,m}\right) m^2/sec = \frac{4-6+2}{\sqrt{29}}\ m/sec.$

$$\boxed{\frac{ds}{dt} = 0\ m/sec}$$

Nombre: ANSWER KEY | Viernes, junio 9, 2017.

UAM-Azcapotzalco. CÁLCULO DIFERENCIAL. Cuestionario #4

1. Calentamiento de una placa. Cuando una placa circular metálica se calienta en un horno, su radio aumenta a razón de 0.01 cm/seg. ¿A qué razón aumenta el área de la placa cuando su radio mide 50 cm?

The plate has an area of

$$A = \pi r^2.$$

Since $r = r(t)$, then $A = A(t)$, they both are functions of time then:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \pi \frac{dr^2}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} \text{ : Chain rule}$$

$$= 2\pi r \dot{r}$$

Now $\dot{r} = \frac{1}{100}$ cm/sec. When $r = 50$ cm.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi (50 \text{ cm}) \cdot \left(\frac{1}{100}\right) \text{cm/sec} = \frac{100\pi \text{ cm}}{100} \cdot \text{cm/sec}$$

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \pi \text{ cm}^2/\text{sec}}$$