UAM - Azcapotzalco. | CÁLCULO DIFERENCIAL | Viernes 16 junio 2017

Cuestionario #5. Nombre:

1. Enuncie (con la mayor precisión posible) el Teorema de Rolle
2. Obtenga los extremos locales de la función
$$f(x) = \sin x - \cos x, \quad \mathrm{Dom}(f) = [0, 2\pi].$$
Mencione en dónde se alcanzan dichos extremos ¿Tiene extremos globales? ¿Por qué? ¿Cuáles son?

---

1. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, diferenciable en el intervalo (a,b), tal que $f(a)=f(b)$. Entonces, existe al menos un punto $x = c \in (a,b)$ tal que:
$$f'(c) = 0$$

---

2. $f(x)$ tiene dominio $[0, 2\pi]$

$f'(x) = \cos x + \sin x$

Pts críticos: (a) $x = 0$, $x = 2\pi$: pts frontera

(b) $f'(x) = 0$ implica $\cos x + \sin x = 0$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = -1 \Rightarrow \tan x = -1.$

Entonces $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$.

(c) $f'(x)$ siempre existe:

Pts críticos

$x = 0, \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$

$f'(x) > 0$, si $x \in [0, \frac{3\pi}{4})$, $f \nearrow$

$f'(x) < 0$, si $x \in (\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, $f \searrow$

$f'(x) > 0$, si $x \in (\frac{7\pi}{4}, 2\pi]$. $f \nearrow$

Máx local en $x = \frac{3\pi}{4}$, y vale $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}.$

Mín local en $x = \frac{7\pi}{4}$, y vale $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}.$

Máx local en $x = 2\pi$, y vale $f(2\pi) = \sin 2\pi - \cos 2\pi$

$= 0 - 1 = -1.$

Mín local en $x = 0$, y vale $f(0) = \sin 0 - \cos 0$

$= 0 - 1 = -1.$

Dado que $f(x)$ es continua en intervalo cerrado $[a,b] = [0,2\pi]$, entonces tiene máximo y mínimo absolutos y valen

$$\max(f) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

$$\min(f) = f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

UAM- Azcapotzalco. CÁLCULO DIFERENCIAL | Viernes 16 de junio 2017

Cuestionario # 5 . Nombre:

---

1. Enuncie (con la mayor precisión posible) el Teorema del Valor Medio.
2. Obtenga los extremos locales de la función

$$g(x) = \sqrt{3}\cos x + \sin x, \quad \mathrm{Dom}(g) = [0, 2\pi].$$

Mencione en dónde se alcanzan dichos extremos. ¿Tiene extremos globales? ¿Por qué? ¿Cuáles son?

---

1. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[a,b]$, diferenciable en el intervalo (a,b).
Entonces existe al menos un punto $x = c \in (a,b)$ tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

---

2. $g(x)$ tiene dominio $[0,2\pi]$, intervalo cerrado.

$$g'(x) = -\sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

Pts críticos: (a) $x=0$, $x=2\pi$: pts frontera.

(b) $g'(x)=0$ implica: $-\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

i.e. $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, i.e. $x = \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

(c) g' siempre existe.

Pts críticos.

$x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, 2\pi.$

$g'(x) > 0$, si $x \in (0, \frac{\pi}{6})$, $g \nearrow$

$g'(x) < 0$, si $x \in (\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6})$, $g \searrow$

$g'(x) > 0$, si $x \in (\frac{7\pi}{6}, 2\pi)$, $g \nearrow$

Min local $g(0) = \sqrt{3}$, se alcanza en $x=0$

Max local $g(\frac{\pi}{6}) = 2$, se alcanza en $x = \frac{\pi}{6}$

Min local $g\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -2$, se alcanza en $x = \frac{7}{6}\pi$

Max local $g(2\pi) = \sqrt{3}$, se alcanza en $x = 2\pi$.

Since $g(x)$ is continuous in a closed interval. $[0, 2\pi]$ then it reaches a global maximum and a global minimum.:

$$\max(g) = g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2$$

$$\min(g) = g\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -2$$

UAM-Azcapotzalco. [CÁLCULO DIFERENCIAL] Viernes 16 junio 2017

Cuestionario #5. Nombre:

1. Enuncie el Teorema del Valor Medio para $f(x) = x^3 - x^2$ en el intervalo $[-1, 2]$

2. Obtenga los extremos locales para la función:

$$h(x) = -2x + \tan x, \quad \mathrm{Dom}(h) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Mencione en dónde se alcanzan dichos extremos. ¿Tiene extremos globales? ¿Por qué? ¿Cuáles son?

---

1. $f(x)$ is a continuous function in the interval $[-1, 2]$, and it has a continuous derivative in the interval $(-1, 2)$. Then, there exists (at least one) $x = c$, such that

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2-(-1)} = f'(c) \quad \text{------} (*)$$

$$\frac{4-(-2)}{3} = f'(c) \Rightarrow \boxed{f'(c) = 2} \text{ -(**)}$$

Now $f'(x) = 3x^2 - 2x$, and $3c^2 - 2c = 2 \Rightarrow 3c^2 - 2c - 2 = 0$

$$\Rightarrow c = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4\cdot 3 \cdot 2}}{2\cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{28}}{2\cdot 3} = \frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{7}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$$

There are two values of c that hold eq's (*) and (**)

---

2. $h(x)$ has a domain $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$h'(x) = -2 + (1 + \tan^2 x)$ or $h'(x) = -2 + \frac{1}{\cos^2 x}$

Critical points: (a) No boundary points

(b) $h'(x) = 0$, when $-2 + \frac{1}{\cos^2 x} = 0$

$-1 =$

i.e., $\cos^2 x = \frac{1}{2}$ i.e. $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Then $x = \frac{\pi}{4}$ and $x = -\frac{\pi}{4}$: $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

(c) $h'(x)$ always exists in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;

since: $h'(x) = -2 + (1 + \tan^2 x)$, and $\tan x$ exists in $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Then; Critical points: $x = \frac{\pi}{4}$ and $-\frac{\pi}{4}$.

$h'(x) > 0$, if $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow h \nearrow$

$h'(x) < 0$, if $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow h \searrow$

$h'(x) > 0$, if $x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow h \nearrow$

Then:
- $h(x)$ has a local max at $x = -\frac{\pi}{4}$, with value, $h\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$
- $h(x)$ has a local min at $x = \frac{\pi}{4}$, with value $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + 1$.

$h(x)$ is continuous on $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, but the interval is <u>open</u>

We cannot state on the existence of global extrema.

Actually, there are <u>not</u> global extrema, since

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} h(x) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} (-2x + \tan x) = -\infty, \text{ and } \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (-2x + \tan x) = \infty$$