UAM-AZCAPOTZALCO CÁLCULO INTEGRAL | Viernes 20 de octubre de 20

Quiz #3

Nombre: Answer Key

Por favor, explique sus respuestas

(1) Considere la función de área:

$$\Phi(y) = \int_a^y e^{-t} \operatorname{Arctan}(1+t^2)\, dt.$$

(a) Calcule: $\Phi'(y)$.

(1b) Considere $y = g(x) = (\sin x)^2$, y la función compuesta:

$\Psi(x) = \Phi(g(x))$. Es decir, $\Psi(x) = \int_a^{\sin^2 x} e^{-t} \operatorname{Arctan}(1+t^2)\, dt$

Calcule $\dfrac{d\Psi}{dx}$

(2) Evalúe: $\displaystyle\int x^4\left(5 - \frac{x^5}{10}\right)^3 dx.$

SOLUCIONES |

(1) Si $\Phi(y) = \int_a^y f(t)\,dt$, por el Teorema Fundamental del

(a) Cálculo, $\dfrac{d\Phi}{dy} = f(y)$.

Entonces:

$$\frac{d\Phi}{dy} = e^{-y} \operatorname{Arctan}(1+y^2).$$

(Aquí: $f(t) = e^{-t} \operatorname{Arctan}(1+t^2)$)

(b) Por la regla de la cadena:

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}, \text{ es decir: } \frac{d\Psi}{dx} = \frac{d\Phi}{dy}\frac{dg}{dx}.$$

$d =$

Como $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^2 x) = 2 \sin x \cos x =$

$= \sin(2x)$,

entonces:

$$\frac{d\Phi}{dx} = e^{-y} \operatorname{Arctan}(1+y^2) \cdot \sin 2x .$$

Como $y = \sin^2 x$:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dx} = e^{-\sin^2 x} \operatorname{Arctan}(1+\sin^4 x) \cdot \sin(2x)}$$

---

(2) Evaluar $\int x^4 \left(5 - \frac{x^5}{10}\right)^3 dx$.

Tomar $u = \varphi(x) = 5 - \frac{x^5}{10}$

Entonces: $\frac{du}{dx} = \frac{d\varphi}{dx} = -5\frac{x^4}{10} = -\frac{1}{2} x^4$.

Así: $-2\frac{d\varphi}{dx} = x^4$.

Entonces $\int x^4 \left(5 - \frac{x^5}{10}\right)^3 dx = \int -2\frac{d\varphi}{dx} (\varphi(x))^3 dx =$

$$= \int -2(\varphi(x))^3 \frac{d\varphi}{dx} dx = \underbrace{\int -2u^3 du}_{\text{substitución}} = -\frac{2}{4} u^4 + C$$

Entonces:

$$= \boxed{\int x^4 \left(5 - \frac{x^5}{10}\right)^3 = -\frac{1}{2}\left(5 - \frac{x^5}{10}\right)^4 + C}$$

En forma compacta: $u = 5 - \frac{x^5}{10}$. Entonces: $du = -\frac{1}{2} x^4 dx$.

Así: $\int \left(5 - \frac{x^3}{10}\right)^3 x^4 dx = \int u^3 (-2) du = -\frac{1}{2} u^4 + C = -\frac{1}{2}\left(5 - \frac{x^5}{10}\right) + C$.