UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – AZCAPOTZALCO.

Cálculo Integral. Quiz - Tarea #5 | Viernes 3 de diciembre de 2017

NOMBRE:

---

(1) Calcule: $\int \csc^4\theta \, d\theta$

(Puede ser de utilidad: $\frac{d}{d\theta}(\csc\theta) = -\csc\theta\cot\theta$
$1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$, $\frac{d}{d\theta}(\cot\theta) = -\csc^2\theta$)

---

(2) Calcule: $\int \frac{2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx$ (con $x>1$).

SOLUCIÓN:

(1) $\int \csc^4\theta \, d\theta = \int \csc^2\theta\csc^2\theta \, d\theta = \int (1+\cot^2\theta)\left(-\frac{d}{d\theta}\cot\theta\right)d\theta$

$$= -\int \frac{d}{d\theta}(\cot\theta)\,d\theta - \int \cot^2\theta\,\frac{d}{d\theta}(\cot\theta)\,d\theta$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo y la Regla de la Cadena:

$$= -\cot\theta - \int \frac{1}{3}\frac{d}{d\theta}(\cot^3\theta)\,d\theta$$

y por el Teorema Fundamental, nuevamente:

$$\boxed{\int \csc^4\theta\,d\theta = -\cot\theta - \frac{1}{2}\cot^3\theta + C}$$

② $$\int \frac{2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx =$$

Tomemos el cambio de variable $x = \sec\theta$

Así: $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \sqrt{\tan^2\theta} = |\tan\theta|$

$= \tan\theta \quad \left(\text{si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right).$

y $\dfrac{dx}{d\theta} = \sec\theta\,\tan\theta$

Entonces:

$$= \int \frac{2}{\sec^3\theta\,\tan\theta}\,\sec\theta\,\tan\theta\,d\theta$$

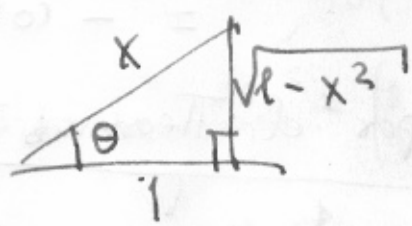
$$= 2\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,d\theta = 2\int \cos^2\theta\,d\theta$$

$$= 2\int \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta = \int d\theta + \int \cos 2\theta\,d\theta$$

$$= \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta + C$$

$$= \theta + \sin\theta\cos\theta + C$$

Ahora: $x = \sec\theta = (\cos\theta)^{-1}$



$\cos\theta = \dfrac{1}{x}$

Así: $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Por lo tanto:

$$\boxed{\int \frac{2}{x^3\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arccos}\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} + C}$$