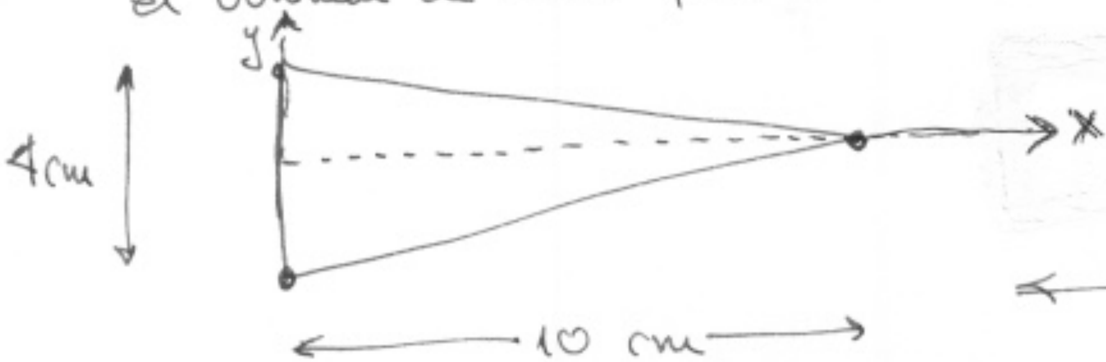
UAM-Azcapotzalco | Martes 28 de noviembre 2017

CÁLCULO INTEGRAL · Tarea - Quiz #8:

Nombre:

(1) Una pirámide de base cuadrada de lado 4cm y altura 10 cm. Usando las técnicas vistas en clase (secciones transversales para calcular volúmenes), calcule el volumen de dicha pirámide



$\longleftarrow$ 10 cm $\longrightarrow$

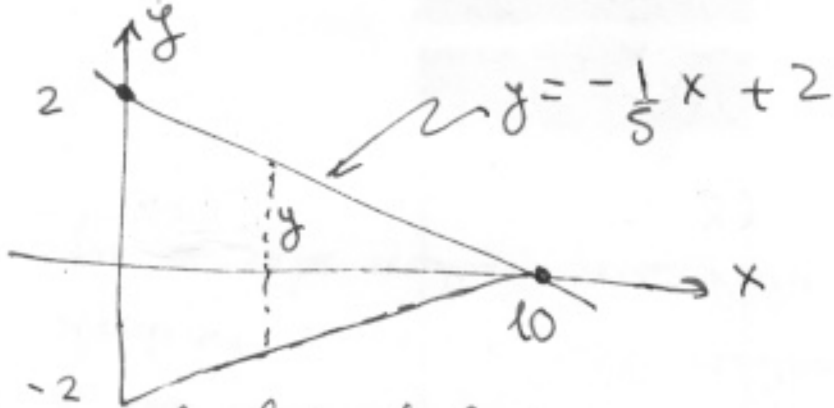
(2) Calcule la longitud de la curva dada por la función
$$y(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{3t^4 - 1}\, dt, \quad -2 \le x \le -1.$$

(3) Se hace rotar la gráfica de la función $y = \tan x$, $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$ alrededor del eje x, sólo escriba la integral que se debe resolver para calcular el área de superficie exterior.

SOLUCIONES

① Tenemos la línea recta: con pendiente $m = -\frac{2}{10} = \frac{-1}{5}$

y ordenada al origen $b = 2$:



La "y" es medio lado de la base de la pirámide:

Entonces: el lado de la base es:

$$l(x) = 2y = 2\left(\frac{-1}{5}x + 2\right)$$

y el área de la base es la sección transversal en x.

$$A(x) = l^2(x) = 4\left(-\frac{1}{5}x + 2\right)^2 = 4\left(\frac{1}{5}x - 2\right)^2.$$

Así, el volumen de la pirámide es:

$$V = \int_0^{10} A(x)\,dx = \int_0^{10} 4\left(\frac{1}{5}x - 2\right)^2 dx = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{5}x - 2\right)^3 \cdot 5 \Big|_0^{10}$$

$$= \frac{20}{3}\left(\frac{1}{5}x - 2\right)^3 \Big|_0^{10} = 0 - \frac{20}{3}(0 - 2)^3 =$$

$$= -\frac{20}{3}(-8) = \frac{160}{3}\ \text{cm}^3$$

$\boxed{V = \frac{160}{3}\ \text{cm}^3}$ Coincide con la fórmula $V = \frac{b \cdot h}{2} =$

$$V = \frac{(4)^2 10}{2} = \frac{160}{2}\ \text{cm}^3.$$

(2) Debemos calcular:

$$\ell = \int_{-2}^{-1} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Pero $y = f(x) = \int_{-2}^{x} \sqrt{3t^4 - 1}\, dt$

Así $y' = f'(x) = \sqrt{3x^4 - 1}$

Entonces

$$\sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{1 + (3x^4 - 1)} = \sqrt{3x^4} = \sqrt{3}\, x^2.$$

Entonces:

$$\ell = \int_{-2}^{-1} \sqrt{3} x^2\, dx = \frac{\sqrt{3}}{3} x^3 \Big|_{-2}^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left((-1) - (-2)^3\right)$$

$$\ell = \frac{\sqrt{3}}{3}(-1 + 8) \Rightarrow \boxed{\ell = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 7}$$

(3) La fórmula del área de la superficie en rotación es

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Aquí $f(x) = \tan x$, $f'(x) = \sec^2 x$.

Así

$$\boxed{A = 2\pi \int_0^{\pi/4} \tan x \sqrt{1 + \sec^4 x}\, dx}$$