UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
CÁLCULO INTEGRAL
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2017.

EXAMEN # 3.
FECHA: VIERNES 8 DE DICIEMBRE DE 2017

Nombre: ANSWER KEY

Instrucciones:

- El examen consta de **cuatro** problemas, cada uno de 25 puntos,
- Tienen **una** hora con **veinticinco (25)** minutos para resolver el examen.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus exámenes.
- Escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. Muestre sus cuentas; simplifique **ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **sin explicación, desarrollo, argumento o justificación** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(25 puntos.)** Calcule $\int_{-345}^{345} x^2 \sin^4(x)\cos(x)\mathrm{Log}(1+x^8)\mathrm{Arctan}(x^6)x\,dx$. Explique en DETALLE.

(2) **(25 puntos.)** Una part´cula de masa $m = 2$ kg, se encuantra a $r = 10$ m del origen. ésta siente una fuerza de atracción hacia el origen dada por

$$F(x) = -\frac{2}{r^2} \quad \text{(Ley de gravitación universal de Newton.)}$$

Si fuerza mueve la partícula desde su punto inicial hasta una distancia $r = 5$m del origen (todo en dirección radial), calcule el trabajo hecho por la fuerza.

(3) **(25 puntos.)** Calcule el volúmen del sólido de revolución generado al hacer rotar (al rededor del eje x) la región encerrada entre las curvas $y = x$ y $y = x^3$. Rotar alrededor de $y=3$: (10 pts extra)

(4) **(25 puntos.)** El segmento de recta

$$y = \frac{b}{h}x$$

con x en el interválo $[0, h]$, al hacerlo rotar alrededor del eje x, es un cono de altura h y base b. Calcule la fórmula de su área superficial.

UAM - Azcapotzalco. | Viernes, Diciembre 8, 2017.

Cálculo Integral Examen #3. ANSWER KEY

(1). Las funciones x^2, $\sin^4(x)$, $\cos(x)$, $\mathrm{Log}(1+x^8)$, $\mathrm{Arctan}(x^6)$ son todas pares.

La función x es impar. Por consiguiente, el integrando $x^2\sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{Log}(1+x^8)\,\mathrm{Arctan}(x^6)\,x$ es una función impar en un intervalo simétrico. $[-345, 345]$, respecto al origen.

Entonces

$$\boxed{\int_{-345}^{345} x^2\sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{Log}(1+x^8)\,\mathrm{Arctan}(x^6)\,x\,dx = 0}$$

(2). El trabajo se calcula de acuerdo a la integral:

$$W = \int_a^b F(x)\,dx, \quad a = \text{punto inicial}, \quad b = \text{punto final},$$

donde la trayectoria de la partícula y la fuerza son colineales en todo punto

$$W = \int_{10}^{5} -\frac{2}{r^2}\,dr = -2\left(\frac{1}{r}\right)\Big|_{10}^{5} = -2\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{10}\right)$$

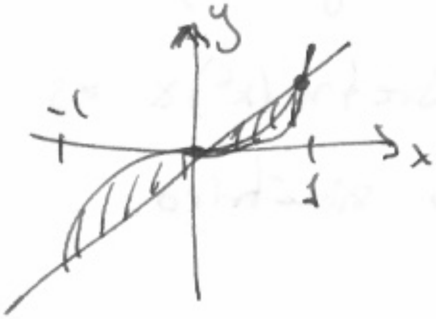
$$= 2\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}\right) = 2\cdot\frac{1}{10} = \frac{1}{5} \text{ Joules}.$$

③ Los gráficos de las curvas se intersectan si las "y" son iguales: $y = f(x) = x$

$$x = x^3 \qquad y = g(x) = x^3$$

Then: $x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x+1) = 0$

Los puntos de intersección son: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.



Dada la simetría, podemos solo considerar el intervalo $[0,1]$. Luego multiplicamos por 2, pues tendremos el doble del volumen

<u>Volumen desde [0,1]:</u>

$V = (\text{Volumen})_1 - (\text{Volumen})_2$, en donde $(\text{Vol})_1$ es aquel de la recta que gira y le quitamos el volumen $(\text{Vol})_2$ de la cúbica que gira. Así:

$$V = \pi\int_0^1 (\text{recta})^2 dx - \pi\int_0^1 (\text{cúbica})^2 dx \left(= \pi\int_0^1 f^2(x)\,dx - \pi\int_0^1 g^2(x)\,dx\right)$$

$$= \pi\int_0^1 x^2 dx - \pi\int_0^1 (x^3)^2 dx = \pi \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - \pi\frac{x^7}{7}\Big|_0^1$$

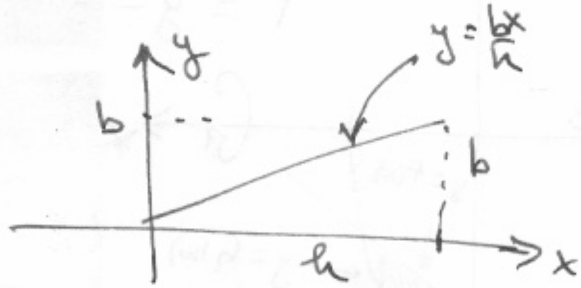
$$= \pi\frac{1}{3} - \frac{\pi}{7} = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{7}\right) = \frac{\pi}{21}(7-3) = \frac{4\pi}{21}$$

Así, el volumen total de la región es:

$$\boxed{V_{total} = 2V = \frac{8}{21}\pi}$$

④ The formula para encontrar superficies de rotación es:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx.$$



Aquí $f(x) = \frac{b}{h}x$

$f'(x) = \frac{b}{h}$

Así:

$$S = 2\pi \int_0^h \left(\frac{b}{h}x\right)\sqrt{1+\frac{b^2}{h^2}}\,dx$$

$$= 2\pi \frac{b}{h}\sqrt{1+\frac{b^2}{h^2}} \int_0^h x\,dx$$

$$= 2\pi \frac{b}{h}\frac{\sqrt{h^2+b^2}}{h} \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^h$$

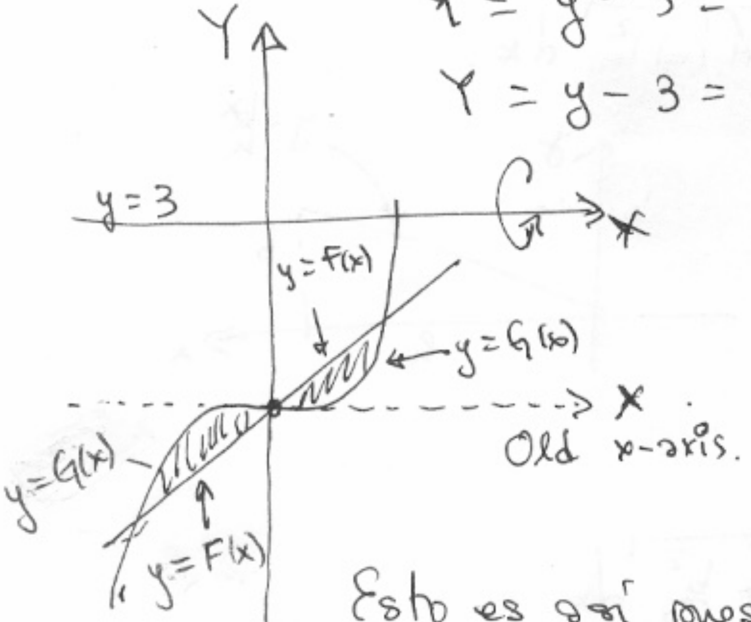
$$= 2\pi \frac{b\sqrt{h^2+b^2}}{\cancel{h^2}} \frac{\cancel{h^2}}{2}$$

$\boxed{S = \pi b\sqrt{h^2+b^2}}$ Es el área superficial del cono.

3(b). Rotate the region about axis $y=3$.

$\boxed{\text{PUNTOS EXTRA}}$ Symmetry is lost.

$$Y = y-3 = f(x)-3 = F(x) = x-3$$
$$Y = y-3 = g(x)-3 = G(x) = x^3-3.$$



The intersections are the same:

$$F(x) = G(x)$$
$$x-3 = x^3-3$$
$$x = x^3$$

Then $x=-1$, $x=0$, $x=+1$.

Esto es así pues los gráficos se desplazaron verticalmente.

Notar que la región a la izquierda del eje Y gira más que la que está a la derecha. Por tanto, <u>no</u> hay simetría.

Así pues, debemos tomar la integral desde $[-1,1]$

$$\text{Volumen} = \pi \int_{-1}^{1} |F^2(x) - G^2(x)|\,dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{0} \left(F^2(x) - G^2(x)\right) dx + \pi \int_{0}^{1} \left(G^2(x) - F^2(x)\right) dx$$

$$= (\text{Volumen})_{\text{izquierda}} + (\text{Volumen})_{\text{derecha}}$$

$$= \pi \int_{-1}^{0} \left((x-3)^2 - (x^3-3)^2\right) dx + \pi \int_{0}^{1} \left(G^2(x) - F^2(x)\right) dx$$

$$= 4 =$$

$$= \pi \int_{-1}^{0} (x^2 - 6x + \cancel{9}) - (x^6 - 6x^3 + \cancel{9})\, dx + \pi \int_0^1 (f_1^2(x) - F^2(x))\, dx$$

$$= \pi \left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{3}{2}x^4 \right) \Bigg|_{-1}^{0} + \pi \left(\frac{-x^3}{3} + 3x^2 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{3}{2}x^4 \right) \Bigg|_{0}^{1}$$

$$= -\pi \left(-\frac{1}{3} - 3 + \frac{1}{7} + \frac{3}{2} \right) + \pi \left(-\frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{1}{3} + 3 - \frac{1}{7} - \frac{3}{2} \right) + \pi \left(-\frac{1}{3} + 3 + \frac{1}{7} - \frac{3}{2} \right)$$

$$= \pi \left(\frac{14 + 126 - 6 - 63}{42} \right) + \pi \left(\frac{-14 + 126 + 6 - 63}{42} \right)$$

$$= \underbrace{\pi \left(\frac{71}{42} \right)}_{\text{Volumen to the left of Y-axis}} + \underbrace{\pi \frac{55}{42}}_{\text{Volume to the right of Y-axis}} = \pi \frac{126}{42} = 3\pi$$

This is bigger.

$$\boxed{\text{Volume} = 3\pi}$$