Universidad Autónoma Metropolitana- Azcapotzalco | Viernes, Enero 26, 2018.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. (Trimestre 18-I)

Quiz #1

Nombre: ANSWER KEY

(1) Considere la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y^3 - y^2 - 12y.$$

(a) ¿Para qué valores de y, $y(t)$ es una solución de equilibrio?

(b) ¿Para qué valores de y, $y(t)$ es una función creciente?

(c) ¿Para qué valores de y, $y(t)$ es una función decreciente?

(2). Verifique que la función $y(t) = t^{1/2}$ es solución de la ecuación diferencial:

$$2t^2\frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} - y = 0, \quad \text{para } t > 0$$

SOLUTION SET:

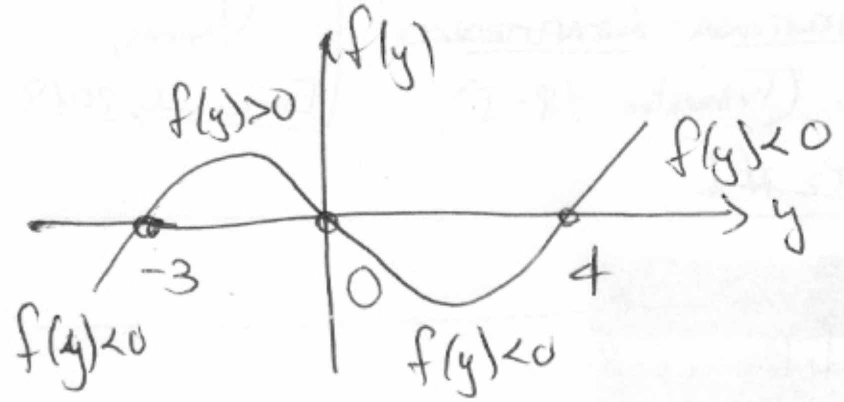
(1). We have: $\frac{dy}{dt} = y(y^2 - y - 12)$

$$\frac{dy}{dt} = y(y-4)(y+3)$$

(a) An equilibrium point is such that: $y(t) = \text{const}$. Then $\frac{dy}{dt} = 0$, then: $0 = y(y-4)(y+3)$. Then $\boxed{y=-3,\ y=0,\ y=4}$ are the equilibria.

Let $f(y) = y(y-4)(y+3)$.

For $y < -3$, $f(y) < 0$



$f(y)<0$, for $y \in (-\infty, -3)$

$f(y)>0$ for $y \in (-3, 0)$.

$f(y)<0$ for $y \in (0, 4)$

$f(y)>0$ for $y \in (4, \infty)$.

Therefore:

(b) $\frac{dy}{dt} = f(y) > 0$, $y(t) \nearrow$ in $(-3,0) \cup (4,\infty)$

(c) $\frac{dy}{dt} = f(y) < 0$, $y(t) \searrow$ in $(-\infty,-3) \cup (0,4)$

---

(2) $y(t) = t^{1/2}$; $y'(t) = \frac{1}{2} t^{-1/2}$; $y''(t) = -\frac{1}{4} t^{-3/2}$

Hence, the left-hand-side is:

$$2t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + 3t\frac{dy}{dt} - y = 2t^2\left(-\frac{1}{4}t^{-3/2}\right) + 3t\left(\frac{1}{2}t^{-1/2}\right) - t^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2}t^{1/2} + \frac{3}{2}t^{1/2} - t^{1/2}$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 1\right)t^{1/2}$$

$$= 0$$

Sí es solución