

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
TRIMESTRE: INVIERNO DE 2018.

EXAMEN # 1.
FECHA: VIERNES 16 DE FEBRERO DE 2018.

Nombre: _____

ANSWER KEY.

Instrucciones:

- El examen consta de CINCO problemas, cada uno de 20 puntos.
- Tienen una hora con veinte (20) minutos para resolverlos.
- Por favor apaguen sus celulares. Eviten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE sus respuestas. Muestre sus cuentas. ARGUMENTE y JUSTIFIQUE sus trabajo.
- Problema sin explicación, desarrollo, justificación o argumento vale CERO puntos.

PROBLEMAS

- (1) (20 puntos.) Resuelva la desigualdad

$$0 \leq \frac{x^5 - x^4}{x^3}.$$

- (2) (20 puntos.) Encuentre el dominio de la función

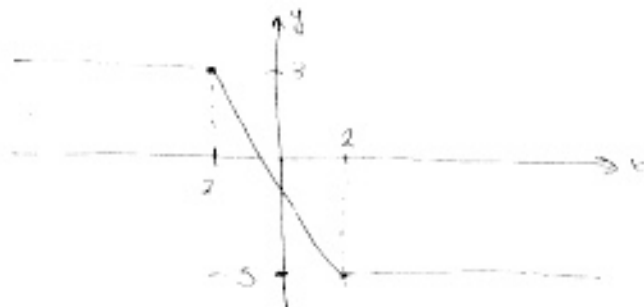
$$F(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

- (3) (20 puntos.) Dos lanchas salen al mismo tiempo de un punto en un lago. Una se dirige hacia el norte a 15 km/hr y la otra hacia el este a 20 km/hr. Encuentre una función que describa la distancia, d , entre las lanchas en término del tiempo, t (en horas), desde la hora de salida de las lanchas.

- (4) (20 puntos.) Bosqueje la gráfica de la siguiente función.

$$f(x) = 4 + 2\sqrt{-(x+3)}.$$

- (5) (20 puntos.) La gráfica de una función es como sigue. Escriba su expresión analítica.



(1) Solve the inequality: $0 \leq \frac{x^5 - x^4}{x^3}$

To start with, $x \neq 0$. Then,

$$\frac{x^5 - x^4}{x^3} = x^3 \frac{(x^2 - x^1)}{x^3} = x^2 - x \quad \leftarrow \text{Since } x \neq 0.$$

Thus:

$$0 \leq x^2 - x$$

i.e.

$$0 \leq x(x-1).$$

The key points are $x=0$ and $x=1$ (since $x(x-1)=0$)

The intervals are $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ and $(1, \infty)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	-	+	+
$x-1$	-	-	+
$x(x-1)$	+	-	+

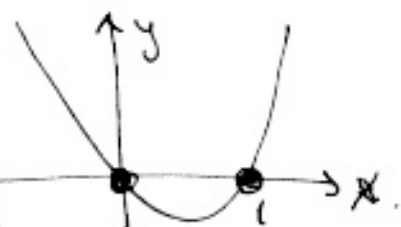
The solution set does not include zero, since $x \neq 0$.

Then, the solution set is $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$

Similarly, $y = x^2 - x$ is a parabola:

$y \geq 0$ for $x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$.

Since $x \neq 0$, then $(-\infty, 0) \cup [1, \infty)$



② Find the domain of.

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

We require $x^2 - 1 \geq 0$

is. $x^2 \geq 1$.

is. $|x| \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$ or $x \leq -1$.

Then $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

is. $\boxed{\text{Dom}(f) = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)}$

③ Two ships depart simultaneously at some point in a lake. One of them moves north with a velocity 15 km/hr and the second one heads east at 20 km/hr. Find the distance between the two ships as a function of time t .

The ship that moves north has a position "y".
Since it moves at 15 km/hr, then:

$$y(t) = 15 \cdot t \text{ km}$$

The second one has a position x , and its velocity is 20 km/hr. Then:

$$x(t) = 20 \cdot t \text{ km}$$

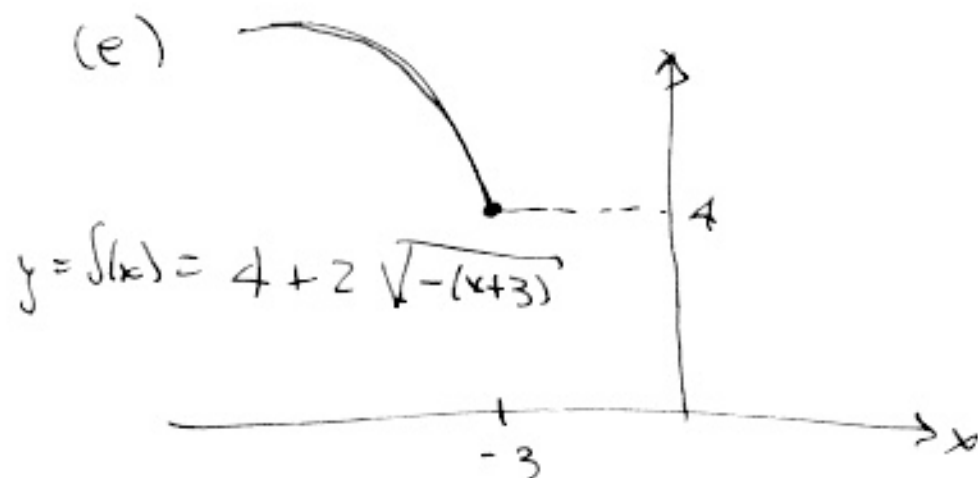
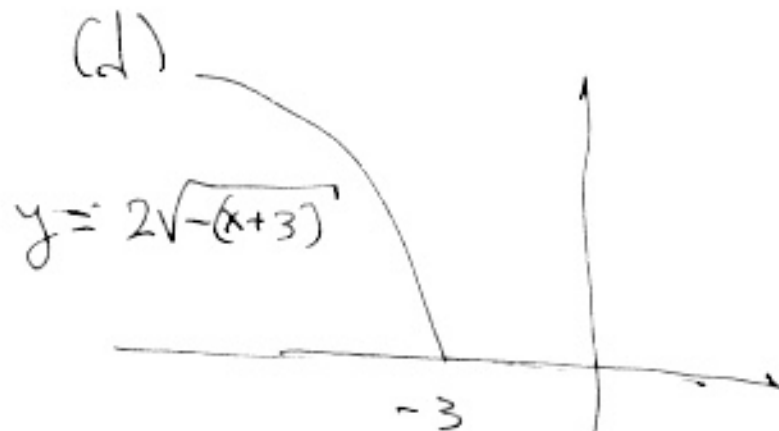
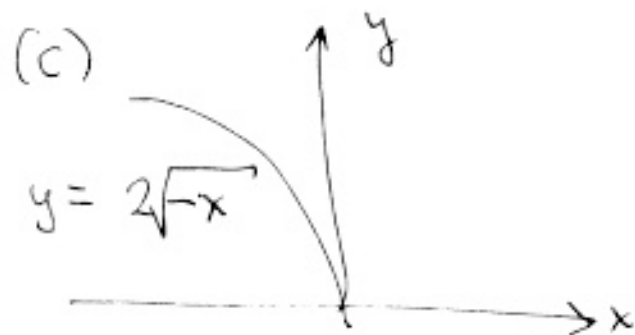
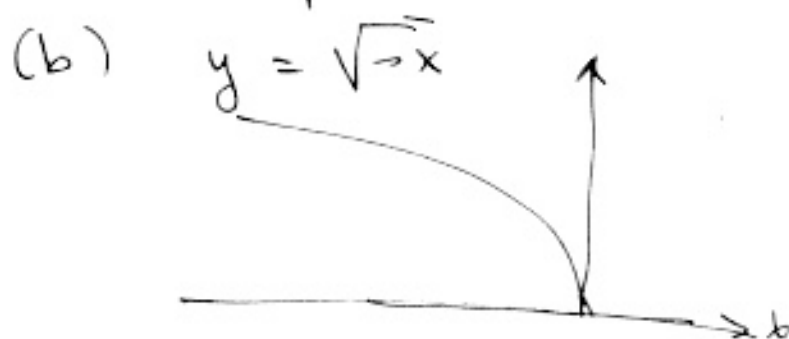
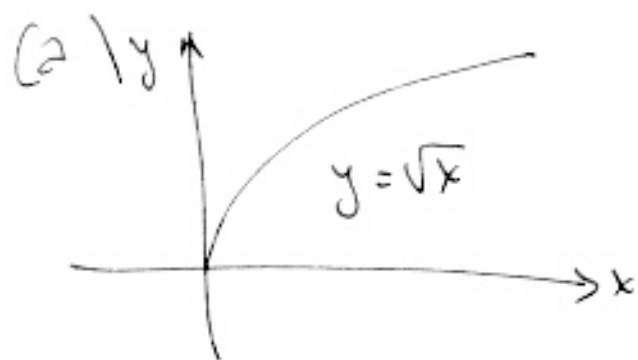
Then the distance is $d(t) = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2} =$
 $= \sqrt{(15^2 + 20^2)t^2} = \sqrt{5^2(3^2 + 4^2)t^2} = 5\sqrt{9+16}t = 5\sqrt{25}t.$

$$\boxed{d(t) = 25 \cdot t \text{ km}}$$

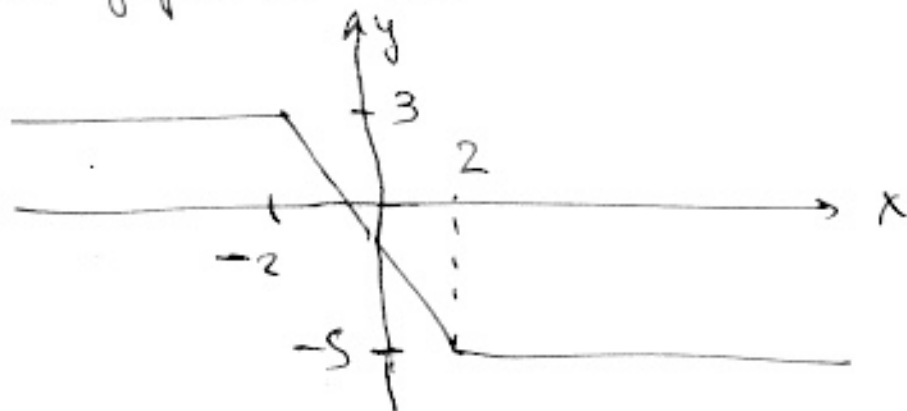
(A) Sketch the graph of

$$f(x) = 4 + 2\sqrt{-(x+3)}$$

We start with the graph of a parabola $y = \sqrt{x}$
(half of a parabola).



⑤ The graph of $f(x)$



The domain of f is \mathbb{R} , but it is piece-wise divided into: $(-\infty, -2)$, $[-2, 2]$, $(2, \infty)$

In between $[-2, 2]$, we have a segment of line of slope $m = \frac{(-5) - (3)}{(2) - (-2)} = \frac{-8}{4} = -2$

and it passes through $(-2, 3)$. Then, $y - y_0 = m(x - x_0)$ is

$$y - 3 = -2(x + 2) \Rightarrow y = -2x - 4 + 3$$
$$y = -2x - 1.$$

This way

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{if } x < -2 \\ -2x - 1, & \text{if } -2 \leq x \leq 2 \\ -5, & \text{if } x > 2. \end{cases}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
TRIMESTRE: INVIERNO DE 2018.

EXAMEN # 1.
FECHA: VIERNES 10 DE FEBRERO DE 2018.

Nombre: _____

ANSWER KEY.

Instrucciones:

- El examen consta de CINCO problemas, cada uno de 20 puntos.
- Tienen una hora con veinte (20) minutos para resolverlos.
- Por favor apaguen sus celulares. Eviten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE sus respuestas. Muestre sus cuentas. ARGUMENTE y JUSTIFIQUE sus trabajo.
- Problema sin explicación, desarrollo, justificación o argumento vale CERO puntos.

PROBLEMAS

- (1) (20 puntos.) Resuelva la desigualdad

$$\frac{x^3 - x^2}{x} \leq 0.$$

- (2) (20 puntos.) Encuentre el dominio de la función

$$G(x) = \sqrt{x - x^2}.$$

- (3) (20 puntos.) Dos lanchas salen al mismo tiempo de un punto en un lago. Una se dirige hacia el norte a 15 km/hr y la otra hacia el este a 20 km/hr. Encuentre una función que describa la distancia, d , entre las lanchas en término del tiempo, t (en horas), desde la hora de salida de las lanchas.

- (4) (20 puntos.) Bosqueje la gráfica de la siguiente función.

$$g(x) = -3|x - 1| + 3.$$

- (5) (20 puntos.) La gráfica de una función es como sigue. Escriba su expresión analítica.



① Solve the inequality.

$$\frac{x^3 - x^2}{x} \leq 0.$$

To start with, $x \neq 0$. Then:

$$\frac{x^3 - x^2}{x} = x \frac{(x^2 - x)}{x} = x^2 - x \quad \leftarrow \text{since } x \neq 0.$$

Hence:

$$\begin{aligned} x^2 - x &\leq 0 & \text{Key points:} \\ x(x-1) &\leq 0 & x=0, x=1. \\ & & (\text{since } x(x-1)=0). \end{aligned}$$

The key intervals are: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \infty)$.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
x	-	+	+
$(x-1)$	-	-	+
$x(x-1)$	+	-	+

The solution set does not admit zero, since $x \neq 0$.

Then, the solution set is:

$$\boxed{[0, 1]}$$

Similarly, $y = x^2 - x \leq 0$ is a parabola.

and $y \leq 0$, for $x \in [0, 1]$.

But $x \neq 0$. Then, the solution set is

$$\boxed{[0, 1]}$$



② Find the domain of the function:

$$f(x) = \sqrt{x - x^2}.$$

We require: $x - x^2 \geq 0$.

i.e. $x^2 - x \leq 0$.

This is the inequality solved in the previous question, but here $x \geq 0$ makes sense. Then:

$$\text{Dom}(f) = [0, 1]$$

③ Two ships depart simultaneously at same point in a lake. One of them moves north with a velocity 15 km/hr, and the second heads east with a velocity 20 km/hr. Find the distance between the two ships as function of t .

The ship moving north has a position $y(t) = 15t$ km, and its velocity is 15 km/hr. The second ship has a position $x(t) = 20t$ km, since its velocity is 20 km/hr.

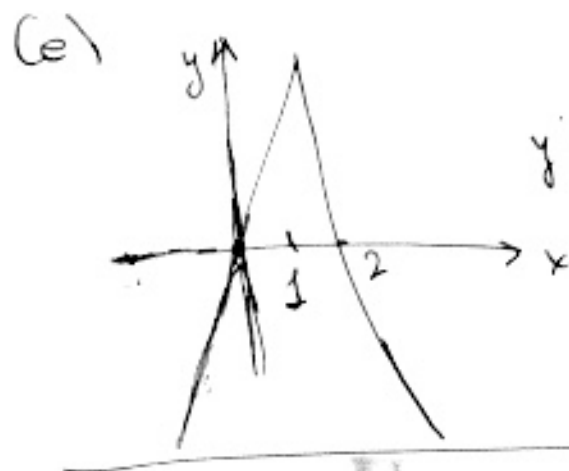
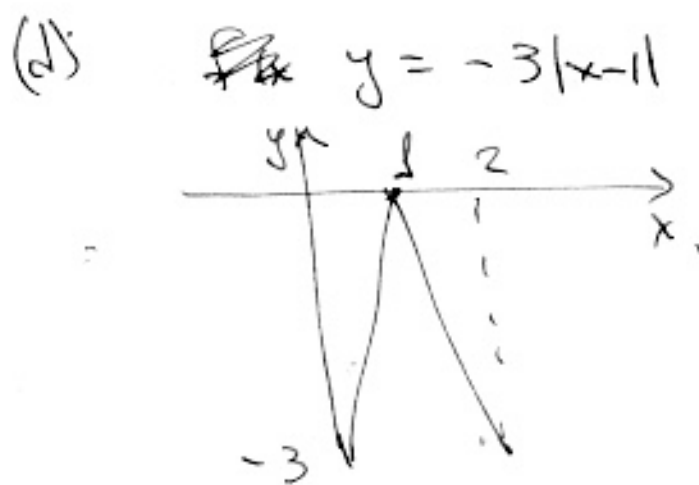
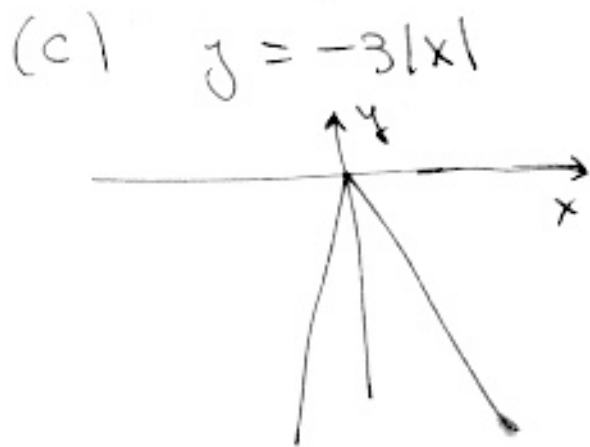
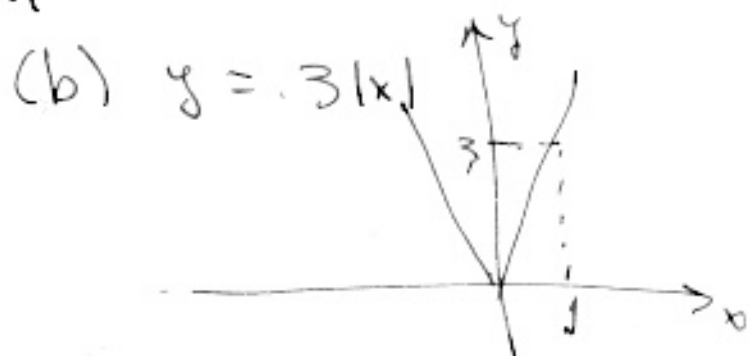
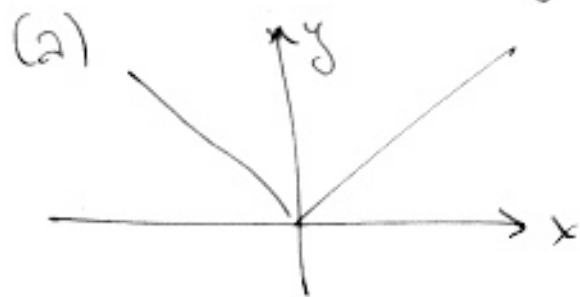
The distance between them is: $d(t) = \sqrt{(15t)^2 + (20t)^2}$
 $= \sqrt{5^2(3^2 + 4^2)t^2} = 5\sqrt{9+16}t = 5\sqrt{25}t = 25t$

$$\boxed{d(t) = 25t \text{ km}}$$

④ Sketch the graph of:

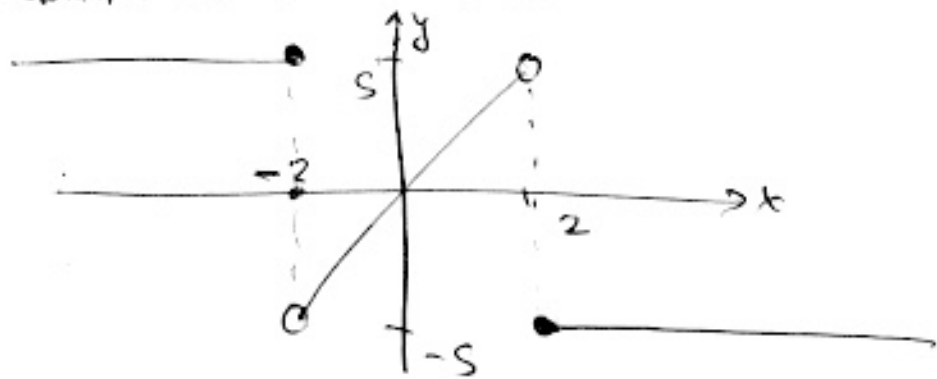
$$g(x) = -3|x-1| + 3.$$

We start with: $y = |x|$



$$y = f(x) = -3|x-1| + 3$$

⑤ The domain of the function:



is \mathbb{R} , but divided into $(-\infty, -2]$, $(-2, 2)$, $[2, \infty)$.

In the interval: $(-2, 2)$, we have a straight line passing through $(0, 0)$ and slope $\frac{5 - (-5)}{2 - (-2)} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Then:

$$f(x) = \begin{cases} 5, & x \leq -2 \\ \frac{5}{2}x, & -2 < x < 2 \\ -5, & x \geq 2 \end{cases}$$