UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

TRIMESTRE: INVIERNO DE 2018.

EXAMEN # 1.

FECHA: VIERNES 16 DE FEBRERO DE 2018

Nombre: ANSWER KEY

Instrucciones:

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **veinte (20)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Eviten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE sus respuestas. Muestre sus cuentas. **ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus trabajo.
- Problema **sin explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Resuelva el problema de valores iniciales

$$t^2\frac{dy}{dt} + 3ty = t^4\,\mathrm{Log}|t| + 1, \qquad y(1) = 0.$$

(2) **(20 puntos.)** Dibuje la línea fase de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = y^2 - 4y - 12,$$

y bosqueje las soluciones con las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = 1; \qquad y(1) = 0; \qquad y(0) = 6; \qquad y(0) = 5.$$

(3) **(20 puntos.)** **Deduzca** el esquema del método de Euler para la siguiente ecuación diferencial, con las condiciones iniciales dadas y un paso Δt arbitrario.

$$\frac{dy}{dt} = 2y^2 + t^2, \qquad y(0) = 1.$$

(4) **(20 puntos.)** Resuelva el problema de valores iniciales: ((Compare with Quiz #4)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-4)(y-1)}, \qquad y(0) = 5/2.$$

(5) **(20 puntos.)** Si $y(t) = e^{t^3}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y),$$

encuentre $f(t, y)$.

DIFFERENTIAL EQUATIONS Exam #1 | Fr, February 16, 2018

ANSWER KEY

(1) Solve the initial value problem:

$$t^2 \frac{dy}{dt} + 3ty = t^4 \operatorname{Log}|t| + 1, \quad y(1) = 0.$$

This is a linear, 1^st order, Diff. Eq. Let us write it in its standard form.

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t} y = t^2 \operatorname{Log}|t| + \frac{1}{t^2}.$$

Solve it by integrating factors.

The integrating factor is:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{t} dt} = e^{3 \operatorname{Log}|t|} = t^3.$$

We have to integrate.

$$\int \mu(t) b(t)\, dt = \int t^3 \left(t^2 \operatorname{Log}|t| + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

$$= \int t^5 \operatorname{Log}|t| + t\, dt = \int t^5 \operatorname{Log}|t|\, dt + \frac{1}{2} t^2$$

Parts

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{6} t^6 \operatorname{Log}|t| - \int \frac{1}{6} t^6 \cdot \frac{1}{t}\, dt + \frac{1}{2} t^2$$

$$= \frac{1}{6} t^6 \operatorname{Log}|t| - \frac{1}{6} \int t^5\, dt + \frac{1}{2} t^2$$

$$= \frac{1}{6} t^6 \operatorname{Log}|t| - \frac{1}{36} t^6 + \frac{1}{2} t^2. +$$

Then: $\frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) b(t) dt = \frac{1}{t^3} \left(\frac{1}{6} t^6 \operatorname{Log}|t| - \frac{1}{36} t^6 + \frac{1}{2} t^2\right)$

$$= \frac{t^3}{6}\left(\log|t| - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2t}$$

Then

$$\boxed{y(t) = \frac{t^3}{6}\left(\log|t| - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2t} + \frac{C}{t^3}}$$

Now: $y(1) = 0$

$$0 = \frac{1}{6}\left(\log|1| - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2\cdot 1} + C.$$

$$0 = -\frac{1}{36} + \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{1}{36} - \frac{1}{2} = \frac{1-18}{36}$$

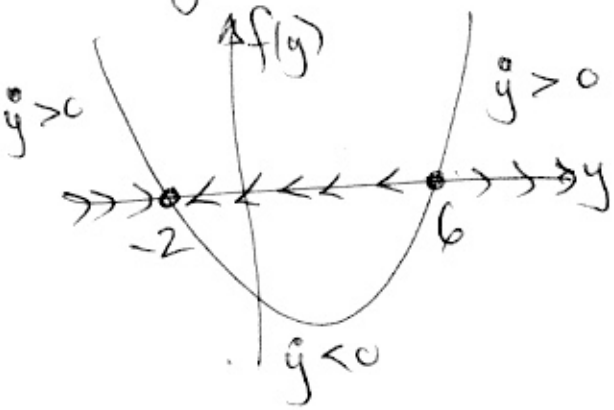
$$= -\frac{17}{36}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{t^3}{6}\left(\log|t| - \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2t} - \frac{17}{36\,t^3}}$$

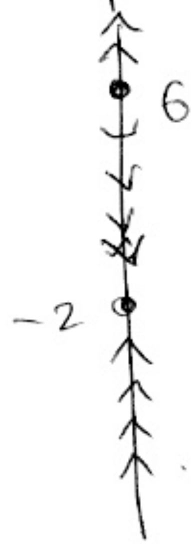
(2) We have $\frac{dy}{dt} = (y+2)(y-6) = f(y)$

The equilibrium solutions are. $\boxed{\begin{array}{l} y = -2 \\ y = +6 \end{array}}$

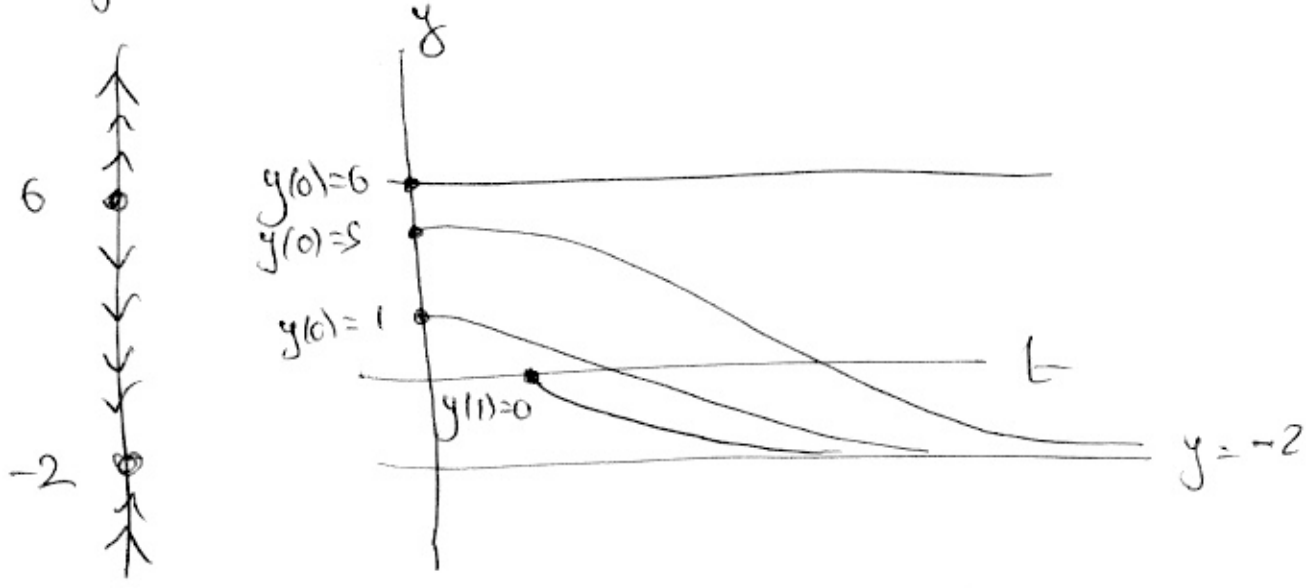
Ploting $f(y)$



Thee phase line is.



Now, we sketch the solutions for the given IVP:



(3) Deduce the Euler's method scheme:

We discretize the derivative at $t = t_k$:

$$\frac{y(t_{k+1}) - y(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = 2y^3(t_k) + t_k^2.$$

Since $t_{k+1} - t_k = \Delta t$, and $y_k = y(t_k)$

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta t} = 2y_k^3 + t_k^2$$

Then:

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + \Delta t\left(2y_k^3 + t_k^2\right)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t_k = k\,\Delta t \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{array}}$$

and initial condition $y(0) = 1$

ie $\boxed{y_0 = 1}$.

---

(4) This is a separable equation: (Compare with Quiz 4)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(y-4)(y-1)} \qquad y(0) = \frac{5}{2}$$

i.e. $\displaystyle\int (y-4)(y-1)\,dy = \int dt$

$$\int y^2 - 5y + 4\,dy = t + C.$$

$$\frac{y^3}{3} - \frac{5}{2}y^2 + 4y = t + C$$

Now $t = 0$, implies $y = \frac{5}{2}$

$$\frac{125}{3\cdot 8} - \frac{5}{2}\cdot\frac{25}{4} + 4\left(\frac{5}{2}\right) = 0 + C$$

$$C = \frac{125}{3\cdot 8} - \frac{3(125)}{3\cdot 8} + \frac{240}{3\cdot 8} = C$$

$$= -\frac{2(125)+240}{24} = -\frac{10}{24} = \frac{-5}{12}$$

$$\boxed{C = \frac{-5}{12}}$$

$$\boxed{\frac{y^3}{3} - \frac{5}{2}y^2 + 4y = t - \frac{5}{12}}$$

Compare solution with Quiz #4.

(5) We must substitute into equation:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{t^3}\right) = f(t,y)$$

$$3t^2 e^{t^3} = f(t,y)$$

Since $y = e^{t^3}$: $\quad 3t^2 y = f(t,y)$

$$\boxed{f(t,y) = 3t^2 y}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
TRIMESTRE: INVIERNO DE 2018.

EXAMEN # 1.
FECHA: VIERNES 16 DE FEBRERO DE 2018

Nombre: ANSWER KEY.

Instrucciones:

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **veinte (20)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Eviten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE sus respuestas. Muestre sus cuentas. **ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus trabajo.
- Problema **sin explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Resuelva el problema de valores iniciales

$$t\frac{dy}{dt} + 3y + 2t = 3t^2, \qquad y(1) = 1.$$

(2) **(20 puntos.)** Dibuje la línea fase de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \cos y.$$

y bosqueje las soluciones con las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = 0; \qquad y(-1) = 1; \qquad y(0) = -\pi/2; \qquad y(0) = \pi.$$

(3) **(20 puntos.)** **Deduzca** el esquema del método de Euler para la siguiente ecuación diferencial, con las condiciones iniciales dadas y un paso Δt arbitrario.

$$\frac{dv}{dt} = 10 - 2v^2, \qquad v(0) = 50.$$

(4) **(20 puntos.)** Resuelva el problema de valores iniciales: Compare with Quiz # 4.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{y(y+3)}, \qquad y(0) = -3.$$

(5) **(20 puntos.)** Si $y(t) = e^{\tan t}$ es solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y).$$

encuentre $f(t, y)$.

ODE's Exam #1 ANSWER KEY. F. February 16, 2018

(1). Solve the IVP.

$$t\frac{dy}{dt} + 3y + 2t = 3t^2 \;;\; y(1) = 1$$

It is a 1st order, linear, Ord. Diff. Eq. Write it in standard form:

$$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}y = 3t - 2.$$

The integrating factor is used here:

$$\mu = e^{\int \frac{3}{t}dt} = e^{3\lg|t|} = t^3.$$

Now:

$$\int \mu(t)b(t)\,dt = \int t^3(3t-2)\,dt = \int 3t^4 - 2t^3\,dt$$

$$= \frac{3}{5}t^5 - \frac{2}{4}t^4 = \frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4.$$

Hence:

$$\frac{1}{\mu}\int \mu(t)b(t)\,dt = \frac{1}{t^3}\left(\frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{2}t^4\right) = \frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{2}t.$$

The solution is then:

$$\boxed{y(t) = \left(\frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{2}t\right) + \frac{C}{t^3}}$$

Now $y(1) = 1$.

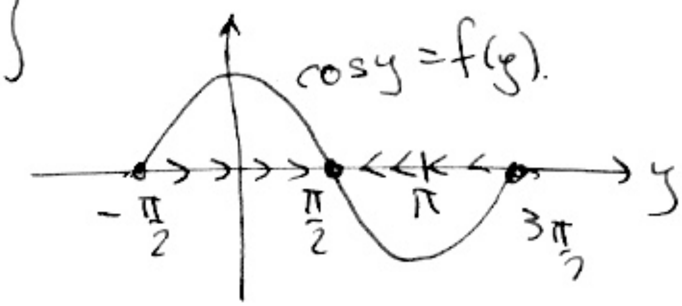
$$1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{9}{10} \qquad \boxed{y(t) = \left(\frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{2}t\right) + \frac{9}{10t^3}}$$

(2) Plot the phase line of

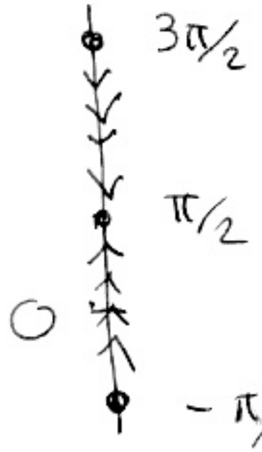
$$\frac{dy}{dt} = \cos y := f(y)$$

Since $\cos y$ is periodic in y, with period 2π, we just have to consider an interval of length 2π.

Say $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

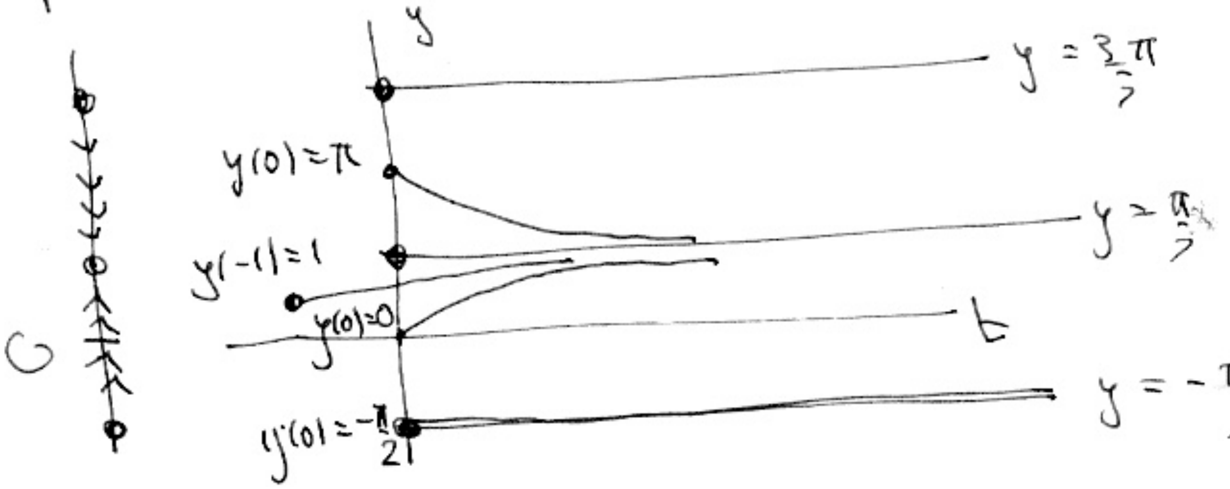


Then



The equilibrium solutions are $y = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$ and $y = \frac{3\pi}{2}$ by periodicity.

The graphs of the solutions of the IVProblems are:



(3) We have to <u>deduce</u> the Euler's method. To this end, we discretize the derivative at $t = t_k$

$$\frac{v(t_{k+1}) - v(t_k)}{t_{k+1} - t_k} = 10 - 2v^2(t_k)$$

For $t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Then $t_{k+1} - t_k = \Delta t$

and if we call $v(t_k) = v_k$:

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{\Delta t} = 10 - 2v_k^2 .$$

Then: $$\boxed{v_{k+1} = v_k + \Delta t\left(10 - v_k^2\right)}$$

with $\boxed{v_0 = 50}$

since $v_0 = v(t_0) = v(0) = 50$

---

(4) The DiffEq is separable: (Compare with Quiz #4)

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{y(y+3)}$$

$$\int y(y+3)\,dy = -\int dt$$

$$\int y^2 + 3y\,dy = -t + C, \text{ i.e. } \frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 = -t + C.$$

Using the initial conditions: $y(0) = -3$

$$\frac{1}{3}(-3)^3 + \frac{3}{2}(-3)^2 = C$$

$$-\frac{27}{3} + \frac{27}{2} = C \Rightarrow C = 27\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{27}{6}$$

Then:

$$\boxed{\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^2 = -t + \frac{27}{6}}$$

Compare with Quiz 4.

(5) We have to substitute onto the Diff. Eq.

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\tan t}\right) = f(y,t)$$

$$e^{\tan t}(\sec^2 t) = f(y,t)$$

Since: $y = e^{\tan t}$:

$$f(y,t) = e^{\tan t}\sec^2 t = y\sec^2 t$$

Hence.

$$\boxed{f(y,t) = \sec^2 t\, y}$$

and the Diff. Eq becomes:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \sec^2 t\, y}$$