UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
EXAMEN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trimestre 18I. Turno matutino. Abril 11 de 2018.

Alumno: Matrícula: Calificación:

El examen global consta de los problemas marcados con (*). Quien presente una de las partes, deberá resolver todos los problemas correspondientes a esa parte. Los resultados deberán mostrar el procedimiento respectivo. **Todos los problemas del examen global tienen el mismo valor.**

PRIMERA PARTE

(1*) Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$xy' = y + x^3 \text{sen } x, \quad y(\frac{\pi}{2}) = \pi$$

(2*) Resolver: $e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\,dy = 0$

(3*) Resolver la ecuación: $(1 + x^2)y' = xy + x^2y^2$

(4*) Un tanque de capacidad 300 galones está parcialmente lleno con 200 galones de líquido en el cual se disuelven 50 libras de sal. Una solución salina que contiene 1/2 libra de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 4 galones por minuto. La solución se mezcla homogñeamente y se bombea afuera del tanque con una rapidez de 2 galones por minuto. Plantear el problema con valores iniciales correspondiente y resolverlo. Hallar el número de libras de sal que hay en el tanque después de 10 minutos y la cantidad de sal que habrá en el tanque en el instante en que empieza a derramarse.

SEGUNDA PARTE

(5) Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$2y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = -1,\, y'(0) = 0$$

(6*) Dada la ecuación diferencial siguiente

$$(x - 1)\,y'' - xy' + y = 0$$

y **una solución** $y_1(x) = e^x$, encontrar su **solución general**.

(7*). Resolver la siguiente ecuación: $y'' - 81y = xe^{9x}$

(8*) Resolver por el **método de variación de parámetros**:

$$y'' - 2y' + y = \frac{xe^x}{(x^2 + 4)}$$

TERCERA PARTE

(9*) Un cuerpo que pesa 80 libras se sujeta a un resorte, propiciándole un estiramiento que 1/2 pie. Supóngase que se el cuerpo se sueltandesde una posición localizada a 2 pies encima de su posición de equilibrio, con una velocidad de 1 pie/s.

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Expresar la solución en su forma alternativa.

c) Obtener la frecuencia, la amplitud y el período del movimiento, así como la cantidad de ciclos completos realizados en 5π segundos.

(10*) Un objeto que pesa 32 libras est sujeto a un resorte cuya constante elástica es $k = 5$ lb/ft. Se sumerge el cuerpo y el resorte en un líquido que opone una resistencia al movimiento de cuerpo numéricamente igual a 6 veces su velocidad instantánea. Inicialmente se suelta el cuerpo desde una posición que se encuentra a 1/3 de pies abajo de su posición de equilibrio, partiendo del reposo.

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Determinar la posición del cuerpo a los 10 s de iniciado el movimiento.

(11*) Se cuelga un cuerpo de 32 libras a un resorte de constante elástica igual a 4 lb/pie. El movimiento se inicia en un punto que se encuentra a 1 pie arriba de su posición de equilibrio con una velocidad de 2 pies/s hacia arriba. Supóngase que no hay amortiguamiento y que el sistema está sujeto a una fuerza externadada por $F(t) = \text{sen}(2t)$.

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Determinar la posición del cuerpo a los 20 s de iniciado el movimiento. Indicar si se presenta el fenómeno de resonancia.

Primera parte

1) $xy' = y + x^3 \sin x$, Exact solution is: $\{C_2 x - x^2 \cos x + x \sin x\}$

$y' - \frac{1}{x} y = x^2 \sin x$

$\mu(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}} = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right) = x \sin x$

$\frac{y}{x} = \int x \sin x dx = \sin x - x \cos x + c$

$$y(x) = x \sin x - x^2 \cos x + cx$$

2) $e^x dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) dy = 0$

$M = e^x$.

$N = e^x \cot y + 2y \csc y$.

$\frac{\partial M}{\partial y} = 0$

$\frac{\partial N}{\partial x} = e^x \cot y$

$\rho(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M} dy} = e^{\int \cot y dy} = e^{\ln(\sin y)} = \sin y$

$e^x \sin y dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) \sin y dy = e^x \sin y dx + (e^x \cos y + 2y) dy$

$M = e^x \sin y$.

$N = e^x \cos y + 2y$.

$\frac{\partial M}{\partial y} = (\cos y) e^x$

$\frac{\partial N}{\partial x} = (\cos y) e^x$

$\Phi = \int M dx = e^x \sin y + f(y)$

$\Phi = \int N dy = e^x \sin y + y^2 + g(x)$

$u = y \qquad dv = \tan y dy$

$du = dy \qquad v = \int \tan y dy = \ln(\sec y)$

$e^x \sin y + f(y) = e^x \sin y + y^2 + g(x)$

$f(y) = y^2$

$g(x) = 0$

$$e^x \sin y + y^2 = c$$

3) $(1 + x^2) y' = xy + x^2 y^2$

$y' - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{x^2}{1+x^2} y^2$

$\mu(x) = e^{-\int \frac{x}{1+x^2} dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} y' - \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} y = \frac{x^2}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} y^2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+1}}\right)(y)$

$v = \frac{y}{\sqrt{x^2+1}}$

$\frac{d}{dx}(v) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)(v)\left(v\sqrt{x^2+1}\right)$

$\int \frac{dv}{v^2} = \int x^2 \sqrt{x^2+1} dx =$

$-\frac{1}{v} = \frac{1}{4} x (x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} x \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$

$-\frac{\sqrt{x^2+1}}{y} = \frac{1}{4} x (x^2+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8} x \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{8} \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c$

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{4}x\left(x^{2}+1\right)-\frac{1}{8}x-\frac{1}{8\sqrt{x^{2}+1}}\ln\left(x+\sqrt{x^{2}+1}\right)+\frac{c}{\sqrt{x^{2}+1}}$$

4) Un tanque con capacidad de 300 *galones* está parcialmente lleno con 200 *galones* de líquido en el cual se disuelven 50 *libras* de sal. Una solución salina que contiene $\frac{1}{2}$*libra* de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 4 *galones* por *minuto*. La solución se mezcla homogéneamente y se bombea afuera del tanque con una rapidez de 2 *galones* por *minuto*. Plantear el problema con valores iniciales correspondiente y resolverlo. Hallar el número de *libras* de sal que hay en el tanque después de 10 min y la cantidad de sal que habrá en el tanque en el instante en que empieza a derramarse.

$\left(\frac{1}{2}\frac{lb}{gal}\right)\left(4\frac{gal}{\min}\right)=2\frac{lb}{\min}$

$\left(\frac{S}{200+2t}\frac{lb}{gal}\right)\left(2\frac{gal}{\min}\right)=\frac{S}{(t+100)}\frac{lb}{\min}$

$\frac{dS}{dt}=2-\frac{S}{(t+100)}$

$S(0)=50$

$\frac{dS}{dt}=2-\frac{S}{(t+100)}$, Exact solution is: $\left\{\frac{t^{2}+200t}{t+100}+\frac{C_{12}}{t+100}\right\}$

$S(t)=\frac{t^{2}+200t}{t+100}+\frac{C_{12}}{t+100}$.

$S(0)=\frac{1}{100}C_{12}=50$, Solution is: 5000

$$S(t)=\frac{t^{2}+200t}{t+100}+\frac{5000}{t+100}.$$

Cantidad de sal a los 10 minutos

$$S(10)=\frac{710}{11}=64.545\ lb$$

Cantidad de sal al momento de llenarse el tanque

$$S(50)=\frac{350}{3}=116.67$$

Segunda parte

5) $2y''-2y'+y=0$, Exact solution is: $\left\{C_{2}\left(\cos\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}-C_{3}e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{1}{2}x\right\}$

$y(x)=C_{2}\left(\cos\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}+C_{3}e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{1}{2}x$.

$y(0)=C_{2}=-1$

$y'(0)=\frac{1}{2}(-1)+\frac{1}{2}C_{3}=0$, Solution is: 1

$$y(x)=e^{\frac{1}{2}x}\left(-\cos\left(\frac{1}{2}x\right)+\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right)$$

6) $(x-1)y''-xy+y=0; y_{1}(x)=e^{x}$.

$(x-1)y_{1}''(x)-xy_{1}'(x)+y_{1}(x)=e^{x}+e^{x}(x-1)-xe^{x}=0$

$y_{2}(x)=u(x)y_{1}(x)$.

$u(x)=\int v(x)\,dx$.

$v(x) = \frac{e^{-\int \frac{-x}{x-1}dx}}{y_1^2(x)} = \frac{e^{x+\ln(x-1)}}{e^{2x}} = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = \frac{x-1}{e^x}$
$u(x) = \int \frac{x-1}{e^x} dx = -xe^{-x}$
$y_2(x) = (-xe^{-x}) e^x = -xe^x e^{-x} = -x$

$$y(x) = c_1 e^x - c_2 x$$

7) $y'' - 81y = xe^{9x}$
$r^2 - 81 = 0$, Solution is: $-9, 9$
$(D - 9I)^2 \circ (D + 9I) \circ (D - 9I)\{y\} = 0$
$r_1 = r_2 = r_3 = 9; r_4 = -9$
$y(x) = k_1 e^{9x} + k_2 xe^{9x} + k_3 x^2 e^{9x} + k_4 e^{-9x}.$
$y_p(x) = k_2 xe^{9x} + k_3 x^2 e^{9x}.$
$y_p''(x) - 81 y_p(x) = 18k_2 e^{9x} + 2k_3 e^{9x} + 36xk_3 e^{9x} = xe^{9x}$
$(18k_2 + 2k_3) e^{9x} + 36k_3 xe^{9x} = xe^{9x}$
$18k_2 + 2k_3 = 0$
$36k_3 = 1$, Solution is: $\frac{1}{36}$
$18k_2 + 2\left(\frac{1}{36}\right) = 0$, Solution is: $-\frac{1}{324}$
$y_p(x) = -\frac{1}{324} xe^{9x} + \frac{1}{36} x^2 e^{9x}$

$$y(x) = c_1 e^{-9x} + c_2 e^{9x} - \frac{1}{324} xe^{9x} + \frac{1}{36} x^2 e^{9x}$$

8) $y'' - 2y' + y = \frac{xe^x}{x^2+4}$
$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x(x+1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{xe^x}{x^2+4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{x^2}{x^2+4} \\ \frac{x}{x^2+4} \end{bmatrix}$
$u = -\int \frac{x^2}{x^2+4} dx = 2 \arctan \frac{1}{2}x - x$
$v = \int \frac{x}{x^2+4} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4)$

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x + \left(2 \arctan \frac{1}{2}x - x\right) e^x + \frac{1}{2} xe^x \ln(x^2 + 4)$$

9) Un cuerpo que pesa 80 *libras* se sujeta a un resorte, propiciandole un estiramiento de $\frac{1}{2}$ *pie*. Supongase el cuerpo se suelta desde una posición localizada a *dos pies* encima de la posición de equilibrio con una velocidad hacia abajo de un pie por segundo.

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.
$W = 80 = \frac{1}{2}k$, Solution is: $k = 160$
$\frac{80}{32} y'' + 160y = 0;\ y(0) = -2;\ y'(0) = 1$
$2.5y'' + 160y = 0$, Exact solution is: $\{1.0C_6 \cos 8.0x - 1.0C_7 \sin 8.0x\}$
$y(x) = c_1 \cos(8x) + c_2 \sin(8x).$
$y(0) = c_1 = -2$
$y'(x) = 8c_2 \cos 8x - 8c_1 \sin 8x$
$y'(0) = 8c_2 = 1$, Solution is: $c_2 = \frac{1}{8}$

$$y(x) = -2\cos(8x) + \frac{1}{8}\sin(8x)$$

b) Expresar la solución en su forma alternativa $y(x) = \rho \cos(w_0 t + \delta)$.

$\rho = \sqrt{(-2)^2 + \left(\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{1}{8}\sqrt{257}$
$w_0 = 8$
$\delta = \arctan\left(\frac{\frac{1}{8}}{-2}\right) = -\arctan\frac{1}{16} = -6.2419 \times 10^{-2}$

$$y(x) = -\frac{1}{8}\sqrt{257}\cos(8x - 0.062\,419)$$

c) Obtener la frecuencia, la amplitud y el periodo del movimiento, así como la cantidad de ciclos completos en 5π *segundos*.

Amplitud $|\rho| = \frac{1}{8}\sqrt{257}$
Frecuencia $F = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{2\pi}{8}} = \frac{4}{\pi}$
Ciclos en $5\pi\ s$ $5(4) = 20$ *ciclos*

10) Un objeto que pesa 32 libras está sujeto a un resorte cuya constante elástica es $k = 5\frac{lb}{ft}$. Se sumerge el cuerpo y el resorte en un líquido que opone una resistencia al movimiento del cuerpo numéricamente igual a 6 veces su velocidad instantánea. Inicialmente se suelta el cuerpo desde una posición que se encuentra a $\frac{1}{3}$ de pies abajo del punto de equilibrio partiendo del reposo.

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

$\frac{32}{32}y'' + 6y' + 5y = 0; y(0) = \frac{1}{3}; y'(0) = 0$
$y'' + 6y' + 5y = 0$, Exact solution is: $\left\{C_{10}e^{-5x} + C_9 e^{-x}\right\}$

$$y(x) = Ae^{-5x} + Be^{-x}.$$

$y(0) = A + B = \frac{1}{3}$
$y'(x) = -Be^{-x} - 5Ae^{-5x}$
$y'(0) = -5A - B = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ Solution is: } \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \\ \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

$$y(x) = -\frac{1}{12}e^{-5x} + \frac{5}{12}e^{-x}.$$

b) Determinar la posición del cuerpo a los 10 s de iniciado el movimiento.

$y(10) = \frac{5}{12}e^{-10} - \frac{1}{12}e^{-50} = 1.8917 \times 10^{-5}$

11) Se cuelga un cuerpo de 32 *libras* a un resorte de constante elastica igual a 4 $\frac{lb}{pie}$. El movimiento se inicia en un punto que se encuentra a un pie arriba de su posición de equilibrio con una velocidad de 2 $\frac{pies}{s}$ hacia arriba. Supóngase que no hay amortiguamiento y que el sistema está sujeto a una fuerza externa dada por $F(t) = \sin(2t)$.

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

$\frac{32}{32}y'' + 4y = \sin(2t)\,; y(0) = -1; y'(0) = 2$

$y'' + 4y = \sin(2t)$, Exact solution is: $\left\{C_{16}\cos 2t - C_{17}\sin 2t - \frac{1}{4}t\cos 2t\right\}$

$y_h(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t)$

$y_p(t) = t(A\cos(2t) + B\sin(2t))$.

$y_p''(t) + 4y_p(t) = 4t(A\cos 2t + B\sin 2t) - t(4A\cos 2t + 4B\sin 2t) + 4B\cos 2t - 4A\sin 2t = 4B\cos 2t - 4A\sin 2t = \sin(2t)$

$4B = 0 \Longrightarrow B = 0$

$-4A = 1 \Longrightarrow A = \frac{-1}{4}$

$$y(t) = c_1\cos(2t) + c_2\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t).$$

$y(0) = c_1 = -1.$

$y'(t) = 2.0\sin 2t - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{2}t\sin 2t + 2c_2\cos 2t$

$y'(0) = 2c_2 - \frac{1}{4} = 2$, Solution is: $\frac{9}{8}$

$= -2.25$

$= 2c_1 - \frac{1}{4} = 2$, Solution is: $\frac{9}{8}$

$$y(t) = -\cos(2t) + \frac{9}{8}\sin(2t) - \frac{1}{4}t\cos(2t).$$

b) Determinar la posición del cuerpo a los 20 s de iniciado el movimiento. Indicar si se presenta el fenómeno de resonancia.

$y(20) = \frac{9}{8}\sin 40 - 6\cos 40 = 4.8399$

Si se presenta el fenómeno de resonancia, la solución estacionaria amplifica la oscilación.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
EXAMEN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES
Trimestre 18I. Turno vespertino. Abril 11 de 2018.

Alumno: Matrícula: Calificación:

El examen global consta de los problemas marcados con (*). Quien presente una de las partes, deberá resolver todos los problemas correspondientes a esa parte. Los resultados deberán mostrar el procedimiento respectivo. **Todos los problemas del examen global tienen el mismo valor.**

PRIMERA PARTE

(1*) Resolver el siguiente problema de valores iniciales

$$(y^2x^2 - e^{2x} + y^2e^{2x} - x^2)dy = (xy^2 + e^{2x} + x + y^2e^{2x})dx, \quad y(0) = 1$$

(2*) Resolver: $(ye^x - y^2\cos x)\,dx + (2e^x - 3y\,\text{sen}\,x)\,dy = 0$

(3*) Resolver la ecuación: $3(1 + x^2)y' = 2xy(y^3 - 1)$

(4*) Obtener la ecuación de las trayectorias ortogonales a la familia de curvas siguiente y encontrar la curva que satisfaga la condición dada:

$$y = \frac{c_1}{1 + x^2}, \quad y(1) = 0$$

SEGUNDA PARTE

(5) Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 7$$

(6*) Dada la ecuación diferencial siguiente

$$y'' - (x + 1)\,y' + y = 0$$

y **una solución** $y_1(x) = e^x$, encontrar su **solución general**.

(7*). Resolver la siguiente ecuación: $y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x} + 2x$

(8*) Resolver por el **método de variación de parámetros**:

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

TERCERA PARTE

(9*) Un cuerpo que pesa 2 kg se sujeta a un resorte, deformándolo 10 cm. Si el cuerpo se pone en movimiento 5 cm arriba de su posición de equilibrio, con una velocidad de 1 m/s,

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Expresar la solución en su forma alternativa.

c) Obtener la frecuencia, la amplitud y el período del movimiento, así como la cantidad de ciclos completos realizados en 5π segundos.

(10*) Después que un cuerpo que pesa 10 lb se sujeta a un resorte de 5 pies de largo, el resorte mide 7 pies. Se quita el cuerpo de 10 lb y se le reemplaza por uno de 8 lb; el sistema completo se coloca en um medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si el cuerpo se suelta desde un punto que está 1/2 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 pie/s,

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Determinar la posición del cuerpo a los 10 s de iniciado el movimiento.

(11*) A un resorte que pende del techo se le sujeta un cuerpo de 1 kg del estremo inferior, estirándolo 0.098 m. Si el movimiento se inicia desde el reposo, a 0.1 m debajo de la posición de equilibrio y se aplica una fuerza externa dada por $f(t) = 2\,\mathrm{sen}(10t)$,

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Determinar la posición del cuerpo a los 20 s de iniciado el movimiento. Indicar si se presenta el fenómeno de resonancia.

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

PROPUESTA DE EXAMEN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trimestre: 18I Fecha: ? Abril del 2018 Horario: 15:00-18:00 hrs.

NOMBRE:____ **Calificacion**_______

NOTA: El examen global consta de los ejercicios marcados con (*). Si presenta solo una parte debe de resolver TODOS los ejercicos de tal parte. Todos los resultados deben mostrar el procedimiento.

PRIMERA PARTE

1.- (*10%) Resolver

$$\begin{aligned} (y^2x^2 - e^{2x} + y^2e^{2x} - x^2)dy &= (xy^2 + e^{2x} + x + y^2e^{2x})dx \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

SOL

Factorizando

$$\begin{aligned} [x^2(y^2-1) + e^{2x}(y^2-1)]dy &= [y^2(x+e^{2x}) + (x+e^{2x})]dx \\ (x^2+e^{2x})(y^2-1)dy &= (y^2+1)(x+e^{2x})dx \end{aligned}$$

que es una ED Separable. Separando variables

$$\frac{y^2-1}{y^2+1}dy = \frac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}}dx$$

Integrando

$$\int \frac{y^2-1}{y^2+1}dy = \int \frac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}}dx$$

Calculando las integrales

$$\int \frac{(y^2+1)-2}{y^2+1}dy$$

$$= \int (1 - \frac{2}{y^2+1})dy$$

$$= y - 2\arctan y$$

y

$$\begin{aligned} &\int \frac{x+e^{2x}}{x^2+e^{2x}}dx \\ = &\ \frac{1}{2}\int \frac{2x+2e^{2x}}{x^2+e^{2x}}dx \\ = &\ \frac{1}{2}\ln(x^2+e^{2x}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la ED es

$$y - 2\arctan y = \frac{1}{2}\ln(x^2+e^{2x}) + c$$

Apliquemos la condición inicial

$$y(0) = 1$$

para calcular la constante de integración c

$$\begin{aligned} 1-2\frac{\pi}{4} &= c \\ c &= -1+\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y - 2\arctan y = \frac{1}{2}\ln(x^2+e^{2x}) + \frac{\pi}{2} - 1$$

2.- (*15%) Resolver

$$\left(ye^x - y^2\cos x\right)dx + \left(2e^x - 3y\sin x\right)dy = 0$$

SOL

Tenemos

$$M_y = e^x - 2y\cos x, \quad N_x = 2e^x - 3y\cos x$$

entonces la ED no es exacta. Veamos si es posible construir su FI

$$\begin{aligned} \frac{1}{M}(N_x - M_y) &= \\ \frac{e^x - y\cos x}{y(e^x - y\cos x)} &= \\ &\frac{1}{y} \end{aligned}$$

Entonces el FI es

$$e^{\int \frac{dy}{y}} = e^{\ln y} = y$$

Multiplicando la ED por el FI

$$\left(y^2e^x - y^3\cos x\right)dx + \left(2ye^x - 3y^2\sin x\right)dy = 0$$

la cuál como

$$\begin{aligned} M_y &= 2ye^x - 3y^2\cos x \\ N_x &= 2ye^x - 3y^2\cos x \\ M_y &= N_x \end{aligned}$$

es exacta, por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^2e^x - y^3\cos x \quad (1) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2ye^x - 3y^2\sin x \quad (2) \end{aligned}$$

integrando la ecuación 1 parcialmente con respecto a x

$$F(x,y) = y^2e^x - y^3\sin x + \phi(y) \quad (3)$$

sustituyendo 3 en 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(y^2e^x - y^3\sin x + \phi(y)) &= 2ye^x - 3y^2\sin x \\ 2ye^x + 3y^2\sin x + \frac{d\phi}{dy} &= 2ye^x - 3y^2\sin x \\ \frac{d\phi}{dy} &= 0 \\ \phi &= 0 \end{aligned}$$

Entonces

$$F(x,y)=y^2e^x-y^3\sin x$$

y la solución de la ED es

$$\begin{aligned} F &= c \\ y^2e^x-y^3\sin x &= c \end{aligned}$$

3.- Resolver

$$3\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=2xy\left(y^3-1\right)$$

SOL
Arreglando términos

$$\begin{aligned} 3\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} &= 2xy^4-2xy \\ 3\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy &= 2xy^4 \end{aligned}$$

Que es un ED de Bernoulli. Normalizando

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{3\left(1+x^2\right)}y=\frac{2x}{3\left(1+x^2\right)}y^4$$

Hagamos el cambio de variable

$$u=y^{-3}$$

para convertir la ED en la siguiente ED Lineal en u

$$\frac{du}{dx}-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}u=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)}$$

Construimos su factor de integración

$$\begin{aligned} FI &= e^{-\int\frac{2xdx}{(1+x^2)}}=e^{-\ln(1+x^2)} \\ &= e^{\ln(1+x^2)^{-1}}=\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Multiplicando la ED lineal por el FI

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{1+x^2}\right)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

integrando

$$\begin{aligned} \frac{u}{1+x^2} &= -\int\frac{2xdx}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2}+c \end{aligned}$$

Despejando u

$$u=1+c(1+x^2)$$

Usando el cambio de variable $u=y^{-3}$ encontramos la solución de la ED de Bernoulli

$$\begin{aligned} y^{-3} &= 1+c(1+x^2) \\ \frac{1}{y^3} &= 1+c(1+x^2) \\ y^3 &= \frac{1}{1+c(1+x^2)} \end{aligned}$$

4.- (*10%) Obtenga las trayectorias ortogonales de la familia de curvas dadas.

$$y = \frac{c_1}{1+x^2}, \quad y(?) = 1$$

SOL

Derivando

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c_1(2x)}{(1+x^2)^2}$$

despejando c_1 de la familia de curvas

$$c_1 = (1+x^2)y$$

y sustituyendo en la ED

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x(1+x^2)y}{(1+x^2)^2}$$

simplificando, obtenemos la ED de la familia de curvas $y = \frac{c_1}{1+x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1+x^2}$$

La ED de las trayectorias ortogonales , esta dada por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+x^2}{2xy}$$

que es Separable, y cuya solución nos da la familia de curvas ortogonal.

Separando variables

$$2ydy = \frac{1+x^2}{x}dx$$

integrando

$$2\int ydy = \int \frac{1+x^2}{x}dx$$

calculando las integrales

$$y^2 = \ln x + \frac{1}{2}x^2 + c_1$$

multiplicando por 2

$$\begin{aligned} 2y^2 &= 2\ln x + x^2 + c \\ 2y^2 - x^2 - 2\ln x &= c \end{aligned}$$

que es la familia de curvas ortogonales a $y = \frac{c_1}{1+x^2}$

Aplicando la condición inicial $y(0) = 1$ para calcular c

$$\begin{aligned} y(1) &= 1 \\ x &= 1, \quad y = 1 \\ 2-1 &= c \\ c &= 1 \end{aligned}$$

entonces la solución es

$$2y^2 - x^2 - 2\ln x = 1$$

SEGUNDA PARTE

1.- Resuelva la ecuación diferencial dada, sujeta a las condiciónes iniciales que se indican

$$y'' + 4y' + 5y = 0 \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 7$$

SOL

Como es lineal homogenea de segundo orden con coeficientes constantes, la ED se resuelve por medio de la siguiente ecuación algebraica

$$r^2 + 4r + 5 = 0$$

usando la fórmula general

$$\begin{aligned} r &= \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{2} \\ &= -2 \pm i \end{aligned}$$

entonces las soluciones son

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-2x}\cos x \\ y_2 &= e^{-2x}\sin x \end{aligned}$$

y la solución general de la ED es

$$y = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

Usamos las condiciones iniciales para calcular las constantes

$$0 = y(0) = c_1$$

Derivando

$$\begin{aligned} y' &= -2e^{-2x}(c_2 \sin x) \\ &\quad + e^{-2x}(c_2 \cos x) \end{aligned}$$

aplicando la condición inicial

$$7 = y'(0) = c_2$$

por lo tanto, la solución del problema de valor inicial es

$$y = 7e^{-2x}\sin x$$

2.- Determinar la solución general de la ecuación diferencial

$$xy' - (x+1)y' + y = 0$$

usando que la función $y_1 = e^x$ es una solución. Justificar sus respuesta

SOL

Para calcular la segunda solución y_2 usamos la siguiente fórmula

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2} dx$$

en donde

$$y_1 = e^x, \qquad P(x) = -(1 + \frac{1}{x})$$

entonces

$$\begin{aligned} e^{-\int P(x)dx} &= e^{\int (1+\frac{1}{x})dx} \\ &= xe^x \end{aligned}$$

sustituyendo en la fórmula

$$\begin{aligned} y_2 &= e^x \int \frac{xe^x}{e^{2x}} dx \\ &= e^x \int xe^{-x} dx \end{aligned}$$

integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= x \qquad du = dx \\ dv &= e^{-x}dx \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int xe^{-x}dx &= -xe^{-x} - e^{-x} \\ &= -e^{-x}(x+1) \end{aligned}$$

entonces, nos queda

$$\begin{aligned} y_2 &= e^x[e^{-x}(x+1)] \\ &= x+1 \end{aligned}$$

y la segunda solución es

$$y_2 = x+1$$

3.- (*10%) Resolver la siguiente ecuacion diferencial eligiendo el método apropiado

$$y''+6y'+8y = 3e^{-2x}+2x$$

SOL
Por coeficientes indeterminados
I) y_c

$$\begin{aligned} r^2+6r+8 &= 0 \\ (r+4)(r+2) &= 0 \end{aligned}$$

tenemos las raices reales diferentes

$$r_1 = -4 \quad r_2 = -2$$

y las soluciones de la homogénea asociada

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{-4x} \qquad y_2 = e^{-2x} \\ CF &= \{e^{-4x}, e^{-2x}\} \end{aligned}$$

por lo que la función complementaria es

$$y_c = c_1e^{-4x} + c_2e^{-2x}$$

II) Determinar y_p

Función CI	Conjunto CI
x	$S_1 = \{x, 1\}$
e^{-2x}	$S_2 = \{e^{-2x}\}$

No hay ELIMINACIÓN porque los conjuntos CI son diferentes
Comparando con el CF

Conjunto CI	CF
$S_1 = \{x, 1\}$ $S_2 = \{e^{-2x}\}$	$CF = \{e^{-4x}, e^{-2x}\}$

S_1 no se modifica, ya que no tiene elementos en común con el CF

S_2 se modifica, ya que tiene un elemento en común con el CF, entonces para que ya no tenga elementos en común con el CF, se multiplica por x

$$S_2' = xS_2 = x\{e^{-2x}\} = \{xe^{-2x}\}$$

entonces después de eliminar y modificar nos quedan los conjunto CI siguientes

$$S_1 = \{x, 1\}, \quad S_2' = \{xe^{-2x}\}$$

de los cuales construimos la integral particular

$$y_p = Ax + B + Cxe^{-2x}$$

donde determinamos las constantes al sustituir y_p en la ED no homogénea

$$y_p'' + 6y_p' + 8y_p = 3e^{-2x} + 2x$$

derivando

$$\begin{aligned} y_p' &= A + Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x} \\ y_p'' &= -2Ce^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x} \\ &= -4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x} \end{aligned}$$

sustituyendo en la ED

$$\begin{aligned} & (-4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x}) \\ & +6(A + Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x}) \\ +8(Ax + B + Cxe^{-2x}) &= 3e^{-2x} + 2x \end{aligned}$$

simplificando

$$2Ce^{-2x} + 8Ax + (6A + 8B) = 3e^{-2x} + 2x$$

comparando coeficientes

$$\begin{aligned} 2C &= 3, \quad C = \frac{3}{2} \\ 8A &= 2, \quad A = \frac{1}{4} \\ 6A + 8B &= 0 \end{aligned}$$

sustituyendo $A = \frac{1}{4}$ en la tercera ecuación

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} + 8B &= 0 \\ 8B &= -\frac{3}{2} \\ B &= -\frac{3}{16} \end{aligned}$$

es decir

$$A = \frac{1}{4}, \quad B = -\frac{3}{16}, \quad C = \frac{3}{2}$$

entonces, la integral particular es

$$\begin{aligned} y_p &= Ax + B + Cxe^{-2x} \\ &= \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} + \frac{3}{2}xe^{-2x} \end{aligned}$$

III) Solución general

$$
\begin{aligned}
y &= y_c + y_p \\
&= c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{16} + \frac{3}{2}xe^{-2x}
\end{aligned}
$$

es la solución del problema

4.- (*15%) Resolver la ecuación diferencial dada

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$$

SOL

I) Calculamos y_p

$$
\begin{aligned}
r^2 + 3r + 2 &= 0 \\
(r+2)(r+1) &= 0
\end{aligned}
$$

$$r_1 = -2, \quad r_2 = -1$$

son reales diferentes

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{-x}$$

la función complementaria es

$$y_c = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

II) Integral particular

Calculamos el wronskiano

$$
\begin{aligned}
W(e^{-2x}, e^{-x}) &= \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{-x} \\ -2e^{-2x} & -e^{-x} \end{vmatrix} \\
&= -e^{-3x} + 2e^{-3x} = e^{-3x}
\end{aligned}
$$

y el término no homogéneo normalizado es $F(x) = \frac{1}{1+e^x}$

Usamos la siguiente fórmula para calcular y_p

$$y_p = y_1[-\int \frac{y_2 F(x)}{W(y_1, y_2)}dx] + y_2[\int \frac{y_1 F(x)}{W(y_1, y_2)}dx$$

en donde

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{-x}, \quad W(e^{-2x}, e^{-x}) = e^{-3x}, \quad F(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

sustituyendo

$$
\begin{aligned}
y_p &= e^{-2x}[-\int \frac{e^{-x}\frac{1}{1+e^x}}{e^{-3x}}dx] + e^{-x}[\int \frac{e^{-2x}\frac{1}{1+e^x}}{e^{-3x}}dx] \\
&= e^{-2x}[-\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx] + e^{-x}[\int \frac{e^x}{1+e^x}dx]
\end{aligned}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx &= \int \frac{u}{1+u}du = \int \frac{(1+u)-1}{1+u}du \\
&= \int (1 - \frac{1}{1+u})du = u - \ln(1+u) \\
&= e^x - \ln(1+e^x) \\
\text{donde tomamos } u &= e^x \quad du = e^x dx
\end{aligned}
$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} y_p &= e^{-2x}[-(e^x - \ln(1+e^x))] + e^{-x}\ln(1+e^x) \\ &= -e^{-x} + e^{-2x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\ln(1+e^x) \end{aligned}$$

III) Solución general

$$\begin{aligned} y &= y_c + y_p \\ &= c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \\ &\quad -e^{-x} + e^{-2x}\ln(1+e^x) + e^{-x}\ln(1+e^x) \end{aligned}$$

es la solución del problema

TERCERA PARTE

1.- (*10%) Una masa de 2 kg suspendida de un resorte lo deforma 10 cm. Si la masa se pone en movimiento 5 cm arriba de su posición de equilibrio, con una velocidad descendente de 1 m/seg,

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Expresar la solución en su forma alternativa: $x(t) = A\sin(\omega t + \phi)$

c) Obtener la frecuencia, la amplitud y el período del movimiento, así como la cantidad de ciclos completos realizados en 5π segundos.

SOLUCIÓN

Tenemos un sistema masa-resorte (sistema MKS), donde

$$m = 2 \text{ kg}$$

POR LO TANTO

$$\begin{aligned} w &= mg = 2(9.8) \\ &= 19.6 \end{aligned}$$

Usando la condición de equilibrio mecánico

$$w = kl$$

podemos calcular k

$$\begin{aligned} k &= \frac{w}{l} \\ &= \frac{19.6}{\frac{1}{10}} = 196 \end{aligned}$$

Entonces tenemos el siguiente problema de valor inicial

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$x(0) = -0.05, \quad x'(0) = 1$$

susutituyendo

$$2x'' + 196x = 0$$

$$x(0) = -0.05, \quad x'(0) = 1$$

Normalizando la ED

$$x'' + 98x = 0$$

$$x(0) = -0.05, \quad x'(0) = 1$$

Tenemos que la solución de la ED es

$$x(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t$$

en donde

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 98 \\ \omega &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

por lo tanto

$$x(t) = c_1 \cos 7\sqrt{2}t + c_2 \sin 7\sqrt{2}t$$

aplicando la primera condición inicial

$$\begin{aligned} -0.05 &= x(0) = c_1 \\ c_1 &= -\frac{5}{100} = -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

derivando la función

$$x'(t) = -7\sqrt{2}c_1 \sin wt + 7\sqrt{2}c_2 \cos 7\sqrt{2}t$$

aplicando la segunda condición inicial

$$\begin{aligned} 1 &= x'(0) = 7\sqrt{2}c_2 \\ c_2 &= \frac{1}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{14} \end{aligned}$$

Entonces la solución del problema es

$$x(t) = -\frac{1}{20} \cos 7\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{14} \sin 7\sqrt{2}t$$

b) Calculamos la amplitud

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{(-\frac{1}{20})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{14})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{2}{196}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{400} + \frac{1}{98}} \\ &= \sqrt{\frac{249}{19\,600}} = \frac{\sqrt{249}}{140} \\ &= 0.11271 \end{aligned}$$

el ángulo de fase

$$\begin{aligned} \phi_C &= \arctan -\frac{\frac{\sqrt{2}}{14}}{\frac{1}{20}} \\ &= \arctan(-\frac{10}{7}\sqrt{2}) \\ &= \arctan(-2.0203) \\ &= -1.1112 \text{ rad} \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \phi_{II} &= \pi - 1.1112 \\ &= 2.0304 \text{ rad} \end{aligned}$$

por lo tanto, la forma alternativa es

$$x(t) = 0.11271 \sin(7\sqrt{2}t + 2.0304)$$

iii) Tenemos

$$\begin{aligned}
\omega &= 7\sqrt{2}\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \qquad A = \frac{\sqrt{249}}{140} = 0.11271 \ \ \text{m} \\
T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{7\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{7}\pi = 0.63470 \text{ seg} \\
f &= \frac{1}{T} = \frac{7}{\sqrt{2}}\frac{1}{\pi} = \frac{7\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\pi} = \frac{\frac{35\sqrt{2}}{2}}{5\pi} \text{ Hz} \\
\text{tenemos } \frac{35\sqrt{2}}{2} &= 24.749 \text{ ciclos en } 5\pi \text{ segundos}
\end{aligned}$$

2.- (*15%) Después que un cuerpo que pesa 10 lb se sujeta a un resorte de 5 pie de largo, el resorte mide 7 pie. Se quita el cuerpo de 10 lb y se le reemplaza por uno de 8 lb; el sistema completo se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea. Si el peso se suelta desde un punto que está 1/2 pie abajo de la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia abajo de 1 pie/s.

(a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

(b) Determinar la posición del cuerpo a los 10 s de iniciado el movimiento.

SOLUCION

Tenemos un sistema masa resorte y amortiguación (sistema inglés de medida), en donde

$$w_k = 10 \text{ lb}$$

que nos permite calcular calcular k usando la condición de equilibrio

$$k = \frac{w}{l} = \frac{10}{2} = 5$$

Ahora, usando el segundo peso, determinamos la masa del sistema

$$\begin{aligned}
w_s &= 8 \\
m &= \frac{w}{g} \\
&= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

como el sistema se coloca en un medio que ofrece una resistencia numéricamente igual a la velocidad instantánea, tenemos

$$\beta = 1$$

entonces, tenemos los siguientes parámetros de este sistema

$$m = \frac{1}{4}, \qquad k = 5, \qquad \beta = 1$$

sustituyendo el la ED que modela el sistema masa resorte y amortiguación

$$\begin{aligned}
mx'' + \beta x' + kx &= 0 \\
\frac{1}{4}x'' + x' + 5x &= 0
\end{aligned}$$

normalizando la ED

$$x'' + 4x' + 20x = 0$$

a) con las siguientes condiciones iniciales

$$x'' + 4x' + 20x = 0$$

$$x(0) = \frac{1}{2}, \quad x'(0) = 1$$

Resolviendo la ED por medio de su ecuación algebraica

$$r^2 + 4r + 20 = 0$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 80}}{2} \\ r &= -2 \pm i4 \end{aligned}$$

entonces tenemos las siguientes raices complejas conjugadas

$$\begin{aligned} r_1 &= -2 + i4 \\ r_2 &= -2 - i4 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-2t} \cos 4t \\ x_2 &= e^{-2t} \sin 4t \end{aligned}$$

y la solución de la ED es

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-2t} \cos 4t + c_2 e^{-2t} \sin 4t \\ &= e^{-2t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) \end{aligned}$$

aplicando las condiciones iniciales para calcular c_1 y c_2

$$\frac{1}{2} = x(0) = c_1$$

derivando

$$\begin{aligned} x'(t) &= -2e^{-2t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t) \\ &\quad + e^{-2t}(-4c_1 \sin 4t + 4c_2 \cos 4t) \end{aligned}$$

aplicando la segunda condición

$$\begin{aligned} 1 &= x'(0) = -2c_1 + 4c_2 \\ 1 &= -1 + 4c_2 \\ 4c_2 &= 2, \qquad c_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

entonces la solución de este problema de valor inicial es

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{-2t}(\cos 4t + \sin 4t)$$

b) la posición en 10 s, esta dada por

$$\begin{aligned} x(10) &= \frac{1}{2} e^{-20}(\cos 40 + \sin 40) \\ &= 8.056\,5 \times 10^{-11} \text{ ft} \end{aligned}$$

3.- (*15%) A un resorte que pende del techo, se le sujeta una masa de 1 kg del extremo inferior estirandolo 0.098 m. Si el movimiento inicia del reposo a

0.1 m debajo de la posición de equilibrio y se le aplica una fuerza de excitación dada por $f(t) = 2\sin(10t)$,

a) Plantear y resolver el problema de valores iniciales.

b) Determinar la posición del cuerpo a los 20 s de iniciado el movimiento. Indicar si se presenta el fenómeno de resonancia.

SOLUCIÓN

Tenemos un sistema masa resorte y fuerza externa (en el sistema MKS) en donde

$$m = 1 \text{ kg}$$

usando la condición de equilibrio, calculamos k

$$k = \frac{w}{l} = \frac{mg}{0.098} = \frac{9.8}{9.8 \times 10^{-2}} = 100 \ \frac{\text{Nw}}{\text{m}}$$

con una fuerza externa

$$f(t) = 2\sin(10)t$$

entonces la ED de este movimiento forzado no amortiguado es

$$mx'' + kx = f(t)$$

y sustituyendo los valores

$$m = 1, \quad k = 100, \quad f(t) = 2\sin(10)t$$

tenemos

$$x'' + 100x = 2\sin 10t$$

con condiciones iniciales

$$x(0) = \frac{1}{10}, \quad x'(0) = 0$$

a) Resolvemos la ED lineal no homogénea

Resolver las homogénea asociada para encontra x_c

$$x'' + 100x = 0$$

cuya solución es

$$x_c(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \sin 10t$$

y tenemos el conjunto fundamental

$$CF = \{\cos 10t, \sin 10t\}$$

determinamos la integral particular

Función CI	Conjunto CI
$\sin 10t$	$S = \{\cos 10t, \sin 10t\}$

no hay modificación, pero al comparar con el CF, tenemos que modificar el conjunto CI

$$S' = tS = \{t\cos 10, t\sin 10t\}$$

y la y_p es

$$x_p = At\cos 10t + Bt\sin 10t$$

para calcular las constantes A y B de y_p la sustituimos en la ED lineal no homogénea

$$x_p'' + 100x_p = 2\sin 10t$$

derivando

$$\begin{aligned} x_p' &= A\cos 10t - 10At\sin 10t \\ &\quad + B\sin 10t + 10Bt\cos 10t \end{aligned}$$

volviendo a derivar

$$\begin{aligned} x_p'' &= -10A\sin 10t - 10A\sin 10t - 100At\cos 10t \\ &\quad +10B\cos 10t + 10B\cos 10t - 100Bt\sin 10t \end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned} x_p'' &= -20A\sin 10t - 100At\cos 10t \\ &\quad +20B\cos 10t - 100Bt\sin 10t \end{aligned}$$

sustituyendo en la ED

$$(-20A\sin 10t - 100At\cos 10t + 20B\cos 10t - 100Bt\sin 10t)$$

$$+100(At\cos 10t + Bt\sin 10t) = 2\sin 10t$$

simplificando

$$-20A\sin 10t + 20B\cos 10t = 2\sin 10t$$

comparando los coeficientes

$$-20A = 2, \quad 20B = 0$$

de donde

$$A = -\frac{1}{10}, \quad B = 0$$

por lo tanto, la integral particular x_p, esta dada por

$$x_p = x_p = -\frac{1}{10}t\cos 10t$$

y la solución general de la ED lineal no homogénea, es

$$\begin{aligned} x &= x_c + x_p \\ &= c_1\cos 10t + c_2\sin 10t \\ &\quad -\frac{1}{10}t\cos 10t \end{aligned}$$

aplicamos las condiciones iniciales

$$x(0) = \frac{1}{10}, \quad x'(0) = 0$$

para calcular c_1 y c_2

$$\frac{1}{10} = x(0) = c_1$$

derivando

$$\begin{aligned} x' &= -10c_1\sin 10t + 10c_2\cos 10t \\ &\quad -\frac{1}{10}\cos 10t + \frac{1}{10}t\sin 10t \end{aligned}$$

aplicando la segunda condición inicial

$$\begin{aligned} 0 &= x'(0) = 10c_2 - \frac{1}{10} \\ c_2 &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

entonces la solución del problema de valor inicial es
a)

$$x(t) = \frac{1}{10}\cos 10t + \frac{1}{100}\sin 10t - \frac{1}{10}t\cos 10t$$

b) Determinar la posición del cuerpo a los 20 s de iniciado el movimiento.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{10}\cos 200 + \frac{1}{100}\sin 200 - \frac{1}{10}20\cos 20 \\ &= -0.776\,18 \text{ m} \end{aligned}$$

Indicar si se presenta el fenómeno de resonancia.

El sistema presenta resonancia, ya que la frecuencia del sistema $\omega = 10$ es igual a la frecuencia de la fuerza externa $f(t) = 2\sin 10t$