UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO
TRIMESTRE: INVIERNO DE 2018.

EXAMEN # 3.
FECHA: **MIÉRCOLES 4 DE ABRIL DE 2018.**

Nombre: SOLUTION SET.

Instrucciones:

- El examen consta de **CUATRO** problemas
- Tienen **una** hora con **veinte (25)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE. Muestre sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(25 puntos.)** Usando la definición, calcule la función derivada de
$$f(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x-7}}.$$

(2) **(25 puntos.)** En clase vimos que la función $h(x) = \frac{1}{x}$ tiene como función derivada $\frac{dh}{dx}(x) = \frac{-1}{x^2}$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $h(x)$ en el punto $(3, \frac{1}{3})$.

(3) **(25 puntos.)** Una partícula recorre una distancia s (en kilómetros) después de transcurridas t horas de acuerdo a la regla:
$$s(t) = t^3 - t^2.$$

(a) Encuentre la velocidad instantánea de la partícula para cualquier instante.
(b) Encuentre la velocidad instantánea en $t = 3$.
(c) ¿En qué instantes la partícula se detiene?

(4) **(25 puntos.)** En clase vimos que la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ tiene como función derivada a la función $\frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}$.

(a) Usando aproximación lineal, aproxime $\sqrt[3]{67}$. Deje su resultado como fracción.
(b) Usando su calculadora, aproxime $\sqrt[3]{67}$.
(c) Compare resultados. ¿Qué tan buena es su aproximación? ¿Cuál es la diferencia que encontró usted y la que encontró su calculadora?

① Using the definition of derivative.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x-7}}\right) = \frac{df}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\pi}{\sqrt{x+h-7}} - \frac{\pi}{\sqrt{x-7}}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\pi\left(\frac{1}{\sqrt{x+h-7}} - \frac{1}{\sqrt{x-7}}\right)}{h}$$

$$= \pi\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{\sqrt{x-7}-\sqrt{x+h-7}}{\sqrt{x+h-7}\sqrt{x-7}}\right)}{h}$$

$$= \pi\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(\sqrt{x-7}-\sqrt{x+h-7})}{(\sqrt{x+h-7}\sqrt{x-7})}\cdot\frac{(\sqrt{x-7}+\sqrt{x+h-7})}{(\sqrt{x-7}+\sqrt{x+h-7})}$$

$$= \pi\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(x-7)-(x+h-7)}{\sqrt{x+h-7}\sqrt{x-7}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x-7}+\sqrt{x+h-7})}$$

$$= \pi\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{(-h)}{\sqrt{x+h-7}\sqrt{x-7}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-7}+\sqrt{x+h-7}}$$

$$= \pi\lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{x+h-7}\sqrt{x-7}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{x-7}+\sqrt{x+h-7})}$$

Once we have canceled out h, we can now evaluate at $h=0$:

$$= \pi\frac{-1}{\sqrt{x-7}\sqrt{x-7}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x-7}} = \frac{-\pi}{2(x-7)^{3/2}}$$

i.e.

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x-7}}\right) = \frac{-\pi}{2(x-7)^{3/2}}}$$

(2) The point at the tangent line is given by $(x_0, y_0) = (3, \frac{1}{3})$. It remains to compute the slope. The slope of the tangent line is the derivative function evaluated at $x_0 = 3$:

$$m = \frac{d}{dx} h(3) = -\frac{1}{3^2} = -\frac{1}{9}.$$

The equation of a line is $y = m(x - x_0) + y_0$, so that the tangent line becomes $\boxed{y = -\frac{1}{9}(x-3) + \frac{1}{3}}$

or $\boxed{y = -\frac{1}{9} x + \frac{2}{3}}$

(3) (a) We studied in class that velocity is the derivative of the position of the particle. Then, the velocity is.

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^3 - t^2\right) = 3t^2 - 2t..$$

i.e. $\boxed{v(t) = 3t^2 - 2t}$

(b) After $t = 3$ hours, the velocity is.

$$v(3) = 3 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3 = 27 - 6.$$

$\boxed{v(3) = 21 \, km/hr}$ Do not forget units!

(c) The particle stops when $v(t) = 0$, i.e., $3t^2 - 2t = 0$

i.e. $t(3t-2) = 0$ i.e. $t = 0$ hours

$t = \frac{2}{3}$ hour.

Then, the particle starts at rest (at $t=0$ hr, $v(0)=0$)

It stops ~~after~~ 40 minutes ($v=0$ at $t=\frac{2}{3}$ hour) after starting the motion.

---

(4) To do this, we must compute the tangent line of $g(x)$ at some specific and nice point.

Near 67, we have 64, for which:

$$g(64)=\sqrt[3]{64}=4.$$

We must find the tangent line at:

$$(x_0,y_0)=(64,g(64))=(64,4).$$

The slope of the tangent line is the derivative evaluated at $x_0=64$:

$$m=\frac{d}{dx}g(64)=\frac{1}{3(\sqrt[3]{64})^2}=\frac{1}{3\cdot4^2}=\frac{1}{48}.$$

Hence, the tangent line $y=m(x-x_0)+y_0$, becomes

$$y=\frac{1}{48}(x-64)+4.$$

Then, the linearization of $g(x)=\sqrt[3]{x}$, about $x=4$ is

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{48}(x-64)+4}$$

(2) Then, to approximate $\sqrt[3]{67}$, evaluate $f(x)$ at $x=67$.

$$f(67)=\frac{1}{48}(67-64)+4=\frac{3}{3\cdot4^2}+4=4+\frac{1}{16}.$$

Then, $\boxed{f(67)=4+\frac{1}{16}=\frac{65}{16}}$

=3=

Then, $\boxed{\sqrt[3]{67} \approx \frac{65}{16}}$

(b) Using the calculator:

$$\sqrt[3]{67} \approx 4.061548$$

(c) Notice that, from (a):

$$\sqrt[3]{67} \approx \frac{65}{16} = 4.0625.$$

¡Se aproximó exactamente con dos cifras decimales!

¡Y el error es de menos de 0.00096!

¡Menos de un milésimo!

Vemos entonces que es bien fácil calcular algunos números radicales y valores de funciones usando rectas tangentes.