Tarea #9 Entrega: Viernes 20 de julio de 2018.
Curso: Temas Selectos de Ingeniería Física II.

① Considere la matriz de Jacobi de $N \times N$ (que corresponde al operador espectral del par de Lax de la "latiz" de Toda). (ecuación (49), de An introduction to the Lax pair, ...)

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_N \\ a_1 & b_2 & a_2 & & \\ \vdots & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \vdots & & & b_{N-1} & a_{N-1} \\ a_N & \cdots & \cdots & a_{N-1} & b_N \end{pmatrix}$$

En clase probamos que $Tr(\mathcal{L}^k)$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$, son las constantes de movimiento.

$$Tr(\mathcal{L}) = b_1 + b_2 + \cdots + b_N = \text{const}$$ es la conservación del momentum.

Calcule $Tr(\mathcal{L}^2)$ y $Tr(\mathcal{L}^3)$ y, de ser posible, de una interpretación física

Hint: Suponga la matriz de 3x3 ó 4x4. Después generalice para cualquier N.

② Considere la ecuación de Korteweg-de Vries: (KdV).

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0.$$

Aquí encontraremos la solución de 1-soliton tal y como la encontraron en 1895 Korteweg y De Vries.

a) Supongo soluciones de tipo onda viajera. Es decir:

$$u(x,t) = f(\xi)$$

$$\xi = x - ct.$$

c = constante, es la velocidad de propagación.

(b) Substituya en la ec. de KdV. Encontrará una ecuación diff. ordinaria de 3^{er} orden para f.

(c) Integre con respecto a ξ dicha ecuación una vez. Encontrará una ec. dif. ordinaria de 2^{o} orden para f. Llame A a la constante de integración.

(d) Vuelva a integrar (respecto a ξ) dicha ecuación, y llame B la constante de integración.

Debe obtener:

$$-\frac{c}{2} f^2 - f^3 + \frac{1}{2} (f')^2 = Af + B. \qquad (*)$$

(e) De la ecuación obtenida en (c), supongo que $f, f'' \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0$, y deduzca que $A = 0$.

(f). De la ecuación $(*)$, supongo $f, f' \xrightarrow[|\xi| \to \infty]{} 0$, y deduzca y observe que $B = 0$.

(g). Debe obtener: $(f')^2 = f^2(c + 2f)$.

Esta ecuación es separable. $\pm \frac{d\xi}{df} = \frac{1}{f\sqrt{2f+c}}$

(h) Usando la substitución: $f = -\frac{1}{2} c \,\mathrm{sech}^2(\theta)$

y concluya que $u(x,t) = f(x-ct) = -\frac{1}{2} c \,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2} c^{1/2}(x - ct - x_0)\right]$

(x_0 = constante).

(h) Usando la sustitución

$$f = -\frac{1}{2} c \,\mathrm{sech}^2(\theta).$$

concluya que:

$$\boxed{u(x,t) = f(x-ct) = -\frac{1}{2} c \,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2} c^{1/2}\left((x-ct)-x_0\right)\right]}$$

Esta es la solución de 1-solitón de la ecuación de KdV.

(x_0 = es constante de integración).
