UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: INVIERNO DE 2019.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
EXAMEN # 1.
FECHA: **VIERNES 7 DE JUNIO DE 2019.**

Nombre: ANSWER KEY

Instrucciones:

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE. Muestre sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(20 puntos.)** Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} - 2\sqrt{y+1}\cos t = 0, \qquad y(\pi) = 0.$$

(2) **(20 puntos.)** Resuelva el problema de valores iniciales

$$t\frac{dy}{dt} + 3y - 2t - 3t^2 = 0 \qquad y(1) = 1.$$

(3) **(20 puntos.)** En un día frío de invierno le sirven su café que se encuentra a 95 grados centígrados. Después de 5 minutos, alcanza una temperatura de 60 grados. Ese día el Sistema Meteorológico Nacional reporta una temperatura de 5 grados. ¿A qué temperatura estarś su café después de otros 5 minutos?

(4) **(20 puntos.)** Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{2y^2 + 2y + 4t^2}{2ty + t}.$$

(5) **(20 puntos.)** En el año 2000, un pueblo tiene 300,000 habitantes. Para el año 2010, dicho pueblo tiene ya 450,000 habitanates. Suponiendo que no hay restricciones de espacio y no tendrán problemas económicos ni de alimentación, ¿cuál será la población de dicho pueblo t años después del año 2000? ¿Cuál será la población de dicho pueblo en 2020? ¿Cuál el el tiempo de duplicado de la población?

UAM - AZCAPOTZALCO. ECUACIONES DIFERENCIALES ORD. [Sat. June 8, 2019.

EXAMEN #1-A. ANSWER KEY

---

(1) This eq'n is separable.

$\frac{dy}{dt} = 2\sqrt{y+1}\cos t \Rightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{y+1}}\,dy = \int \cos t\,dt.$

$\Rightarrow \sqrt{y+1} = \sin t + C \Rightarrow \boxed{y(t) = -1 + (\sin t + C)^2}$

At $t=\pi$: $y(\pi)=0$:

$\sqrt{0+1} = \sin\pi + C \Rightarrow 1 = 0 + C \Rightarrow C = 1$:

$\Rightarrow \boxed{y(t) = -1 + (\sin t + 1)^2.}$

---

(2) This is a linear equation:

$\frac{dy}{dt} + \frac{3}{t}y = 3t - 2$, with $\mu(t) = e^{\int \frac{3}{t}dt} = t^3$

Now $\int \mu(t)q(t)\,dt = \int t^3(3t-2)\,dt = \int 3t^4 - 2t^3\,dt = \frac{3t^5}{5} - \frac{2t^4}{4}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{t^3}\left(\frac{3t^5}{5} - \frac{1}{2}t\right) + \frac{C}{t^3}$ $\boxed{y(t) = \frac{3}{5}t^7 - \frac{1}{2}t + \frac{C}{t^3}}$

At $t=1$, $y(1)=1$

$1 = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = \frac{9}{10} \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{3}{5}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{9}{10t^3}.}$

---

(3) We have the following data

$T(0) = 95°C$ Newton's Law of Cooling $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$

$T(5) = 60°C$ $\Rightarrow T(t) = (T(0) - T_a)e^{-kt} + T_a$

$T_a = 5°C$ $\boxed{T(t) = 90\, e^{-kt} + 5\ (°C)}$

$T(10) = ?$

At $t = 5\,min$: $60 = 90\, e^{-5k} + 5 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{55}{90}$ $\boxed{k = \frac{1}{5}\log\left(\frac{90}{55}\right)}$

$\boxed{k \approx 0.098\ 1/min}$

$\Rightarrow \boxed{T(t) = 90\, e^{-\left(\frac{1}{5}\log\left(\frac{90}{55}\right)\right)t} + 5}$

$\Rightarrow T(t) = 90\, e^{\log\left(\frac{90}{55}\right)^{-t/5}} + 5 \Rightarrow \boxed{T(t) = 90\left(\frac{55}{90}\right)^{t/5} + 5\ °C}$

$T(10) = 90\left(\frac{55}{90}\right)^2 + 5 \Rightarrow \boxed{T(10) \approx 38.6°C}$

---

(4) We have the Diff. Eq'n:

$$\underbrace{(2y^2 + 2y + 4t^2)}_{M(t,y)} + \underbrace{(2ty + t)}_{N(t,y)}\frac{dy}{dt} = 0.$$

$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial M}{\partial y} = 4y + 2 \\ \frac{\partial N}{\partial t} = 2y + 1\end{array}\right\}$ Not Exact $\Rightarrow$ Integrating factor: $\mu(t,y)$

$\mu_y M + \mu M_y = \mu_t N + \mu N_t.$

If $\mu_y = 0 \Rightarrow \frac{\mu_t}{\mu} = \frac{M_y - N_t}{N} = \frac{(4y+2) - (2y+1)}{2ty + t} = \frac{2y+1}{t(2y+1)}$

$\Rightarrow \frac{\mu_t}{\mu} = \frac{1}{t} \Rightarrow \mu(t) = t.$

Sat, June 8, 2019

Then: $(2ty^2 + 2ty + 4t^3) + (2t^2y + t^2)\frac{dy}{dt} = 0$

is an exact Diff Eq!.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 2ty^2 + 2ty + 4t^3 \Longrightarrow F(t,y) = t^2y^2 + t^2y + t^4 + f(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2t^2y + t^2 \quad \text{compare with: } \frac{\partial F}{\partial y} = 2t^2y + t^2 + f'(y)$$

Then $f'(y) = 0 \Rightarrow f(y) = \text{const.}$

$$\Rightarrow F(t,y) = t^2y^2 + t^2y + t^4 + \text{const}$$

and the solution is: $\boxed{t^2y + t^2y + t^4 = C}$

---

(5) $P(0) = 300{,}000$ inhabitants
$P(10) = 450{,}000$ inhabitants.

Malthus' model: $\Rightarrow \frac{dP}{dt} = \alpha P(t)$

$\Rightarrow P(t) = P(0)e^{\alpha t}$. Now. $P(10) = P(0)e^{10\alpha} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{10}\operatorname{Log}\left(\frac{P(10)}{P(0)}\right)}$

$$\boxed{\alpha =} \frac{1}{10}\operatorname{Log}\left(\frac{450000}{300000}\right) = \boxed{\frac{1}{10}\operatorname{Log}\left(\frac{15}{10}\right)\frac{1}{\text{year}}} \approx 0.04 \ \frac{1}{\text{year}}$$

$$\Rightarrow P(t) = P(0)\, e^{\left(\frac{1}{10}\log\frac{P(10)}{P(0)}\right)t} = P(0)\, e^{\operatorname{Log}\left(\frac{P(10)}{P(0)}\right)^{t/10}}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t) = P(0)\left(\frac{P(10)}{P(0)}\right)^{t/10}} \quad \text{or} \quad \boxed{P(t) = 300{,}000\left(\frac{15}{10}\right)^{t/10}}$$

In 2020, $t = 20$ years

$$P(20) = 300{,}000\left(\frac{15}{10}\right)^2 = \frac{(300{,}000)(15)^2}{100} = \boxed{675{,}000 \text{ inhabitants}}$$

~~Doubling time: Next page;~~ This is exact.

Doubling-time: T: $P(T) = 2P(0)$

$$\Rightarrow P(0)\left(\frac{P(10)}{P(0)}\right)^{T/10} = 2P(0) \Rightarrow \left(\frac{P(10)}{P(0)}\right)^{T/10} = 2.$$

$$\Rightarrow \frac{T}{10}\log\left(\frac{P(10)}{P(0)}\right) = \log 2 \Rightarrow \boxed{T = 10\,\frac{\log(2)}{\log\left(\frac{P(10)}{P(0)}\right)}\text{ years}}$$

$$\boxed{T = 10\,\frac{\log(2)}{\log(15/10)}\text{ years}}$$

$$\boxed{T \approx 17.09\text{ years}}$$

$$\boxed{T \approx 17\text{ years} + 0\text{ month}}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
TRIMESTRE: INVIERNO DE 2019.

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
EXAMEN # 1.
FECHA: **VIERNES 7 DE JUNIO DE 2019.**

Nombre: ANSWER KEY.

Instrucciones:

- El examen consta de **CINCO** problemas de 20 puntos cada uno.
- Tienen **una** hora con **treinta (30)** minutos para resolverlos.
- Por favor **apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE. Muestre sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN explicación, desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) (**20 puntos.**) Resuelva el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} - 2t\cos^2 y = 0, \qquad y(0) = \pi/4.$$

(2) (**20 puntos.**) Resuelva el problema de valores iniciales

$$\sin t\frac{dy}{dt} + y\cos t - t\sin t = 0, \qquad y(\pi/2) = 2.$$

(3) (**20 puntos.**) Después de su examen de Ecuaciones Diferenciales, decide irse a La Frontera con sus amigos a tomarse una fría cerveza. Le sirven su cerveza a 1 grado centígrado. Después de 5 minutos alcanza una temperatura 6 grados. Después de otros 5 minutos, ¿a qué temperatura estará su cerveza? La temperatura que da el Sistema Meteorológico Nacional para ese día es de 32 grados.

(4) (**20 puntos.**) Resuelva la ecuación diferencial:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 + 2t}{t^2}.$$

(5) (**20 puntos.**) Se tienen 200 gr. de un elemento radioactivo que después de 5 años quedan solamente 150 gr. ¿Cuántos gramos quedarán t años después? ¿Cuántos gramos quedarán 5 años después? ¿Cuál es la vida media de dicho elemento?

UAM-AZCAPOTZALCO. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. | Sat. June 8. 2019

Examen #1-B. ANSWER KEY

① This eq'n is separable:

$\frac{dy}{dt} - 2t\cos^2 y = 0 \Rightarrow \int \sec^2 y\, dy = \int 2t\, dt \Rightarrow \tan y = t^2 + C$

At $t = 0,\ y = \pi/4 \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0^2 + C \Rightarrow C = 1$

$$\boxed{y(t) = \arctan(t^2+1)}$$

② This is a linear eq'n: Use integrating factor.

$\frac{dy}{dt} + \frac{\cos t}{\sin t} y = t \Rightarrow \mu(t) = e^{\int \frac{\cos t}{\sin t} dt} = e^{\log(\sin t)} = \sin t$

$\Rightarrow \sin t \frac{dy}{dt} \Rightarrow \int \mu(t) g(t) dt = \int (\sin t)\, t\, dt =$ by parts.

$= -t\cos t + \int \cos t\, dt = -t\cos t + \sin t.$

Hence $y(t) = \frac{1}{\sin t}\left(-t\cos t + \sin t\right) + \frac{C}{\sin t}\left(= \frac{1}{\mu(t)}\int \mu(t) g(t)\, dt + \frac{C}{\mu(t)}\right)$

$\Rightarrow y(t) = 1 - \frac{t}{\tan t} + \frac{C}{\sin t}$

for $t = \frac{\pi}{2}$: $\tan t \longrightarrow \infty \Rightarrow 2 = 1 - 0 + C \Rightarrow \boxed{C = 1}$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = 1 - \frac{t}{\tan t} + \frac{1}{\sin t}}$$

Remark: Notice that the original Diff. Eq'n is already exact:

$\sin t \frac{dy}{dt} + (\cos t) y = t \sin t \Rightarrow \frac{d}{dt}\left((\sin t)\cdot y(t)\right) = t \sin t$

$\Rightarrow \sin t\,(y(t)) = \int t \sin t\, dt + C$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{\sin t}(-t\cos t + \sin t) + C/\sin t}$

③ Newton's Cooling Law.

$T_a = 32°C$

$T(0) = 1°C$

$T(5) = 6°C$

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a).$$

$$\Rightarrow T(t) = (T(0) - T_a)e^{-kt} + T_a.$$

$$= (1-32)e^{-kt} + 32. = -31e^{-kt} + 32(°C)$$

Find k: At $t = 5$ min.

$$6 = T(5) = -31e^{-5k} + 32 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{26}{31} \Rightarrow \boxed{k = \log\left(\frac{31}{26}\right)^{1/5} \approx 0.035 \frac{1}{\text{min}}}$$

$$\Rightarrow T(t) = -31e^{-(\log(\frac{31}{26})^{1/5})t} + 32 = -31e^{\log(\frac{31}{26})^{-t/5}} + 32$$

$$\boxed{T(t) = -31\left(\frac{26}{31}\right)^{t/5} + 32\ (°C)}$$

After 5 more minutes: $t = 10$ min

$$T(10) = -31\left(\frac{26}{31}\right)^2 + 32 = -\frac{26^2}{31} + 32$$

$$\boxed{T(10) \approx 10.19°C}$$

④. Write the Diff Eq'n in the form, $\underbrace{-(y^2+2t)}_{M} + \underbrace{t^2}_{N}\frac{dy}{dt} = 0$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= -2y\\ \frac{\partial N}{\partial t} &= 2t\end{aligned}\right\}$$ Not exact. Now:

If $\mu_y = 0$: $\frac{\mu_t}{\mu} = \frac{M_y - N_t}{N} = -\frac{2y - 2t}{t^2}$

It does not work

If $\mu_t = 0 \Rightarrow \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{N_t - M_y}{M} = \frac{2y + 2t}{-(y^2+2t)}$ It does not work either

$\Rightarrow$ We cannot find integrating factors $\mu(y)$ or $\mu(t)$.

Sat. June 8, 2019

(5) Radioactive decay Law $\frac{dM}{dt} = -\beta M$

$$\Rightarrow M(t) = M(0)\, e^{-\beta t}$$

Now: $M(0) = 200$ gr
$M(5) = 150$ gr.

$$\Rightarrow M(5) = M(0)\, e^{-\beta 5} \Rightarrow e^{\beta 5} = \frac{M(0)}{M(5)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta = \frac{1}{5} \operatorname{Log}\left(\frac{M(0)}{M(5)}\right)} \left(1/\text{year}\right)$$

$$\Rightarrow \beta = \operatorname{Log}\left(\frac{200}{150}\right)^{1/5} = \operatorname{Log}\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5} \approx 0.057 \ 1/\text{year}$$

Then: $M(t) = M(0)\, e^{-\left(\frac{1}{5}\log\left(\frac{M(0)}{M(5)}\right)\right)t} = M(0)\, e^{\log\left(\frac{M(5)}{M(0)}\right)^{t/5}}$

i.e. $\boxed{M(t) = M(0)\left(\frac{M(5)}{M(0)}\right)^{t/5}}$

or: $\boxed{M(t) = 200\left(\frac{3}{4}\right)^{t/5}}$

When $t = 10$ years: $M(10) = 200\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{200 \cdot 9}{16}$.

$$\Rightarrow \boxed{M(10) = 115.50 \text{ gr}}$$ Exactamente

Half-life. T.

$$M(T) = \frac{M(0)}{2} \Rightarrow 200\left(\frac{3}{4}\right)^{T/5} = \frac{200}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{T/5} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{T}{5}\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{T = 5\,\frac{\operatorname{Log} 2}{\operatorname{Log}\frac{3}{4}} \text{ years}}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \approx 12.04 \text{ years}}$$

$$\boxed{T \approx 12 \text{ years} + 2 \text{ weeks}}$$