## UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO

**Examen de Recuperación de Ecuaciones Diferenciales. Trimestre 19I. Vespertino.**

**Nombre:** ANSWER KEY. **Matrícula:** ____________

1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales: **(3 puntos)**
   (a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy - 7y + x - 7}{xy + 4y - x - 4}$
   (b) $(4x^2 + 2y + 2y^2)\,dx + (x + 2xy)\,dy = 0$
   (c) $3y' + 2xy = xy^{-2}$

2. Una limonada cuya temperatura es de 5 °C se coloca en un cuarto donde la temperatura es de 21 °C. Si 3 minutos más tarde la temperatura de la limonada es de 10 °C, ¿cuál será su temperatura después de que transcurran otros 6 minutos?

   **(1 punto)**

3. Determine la solución general de la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0,$$

   considerando que $y_1 = x^2$ es una solución de ella. **(1 punto)**

4. Utilizando el método de coeficientes indeterminados resuelva **(1.5 puntos)**

$$y'' - y' + \frac{1}{4}y = e^{x/2}$$

5. Resuelva la ecuación diferencial **(1.5 puntos)**

$$y'' + 4y = \tan 2x$$

6. Cuando se sujeta un cuerpo que pesa 32 lb al extremo de un resorte, éste se estira 3 pulgadas. Se quita este cuerpo y se reemplaza por uno de 16 lb, el cual se desplaza 3 pulgadas hacia abajo de la posición de equilibrio, y desde ahí se le comunica una velocidad dirigida hacia arriba de 1 ft/s.
   (a) Determine la ecuación del movimiento.
   (b) ¿En qué instante pasa el cuerpo por la posición de equilibrio en dirección hacia abajo por primera vez?

   **(2 puntos)**

UAM - AZCAPOTZALCO. Miércoles 28 de agosto de 201

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS. Examen de Recuperación

(1) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.

(a) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy - 7y + x - 7}{xy + 4y - x - 4}$.

Esta ecuación es separable:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(y+1) - 7(y+1)}{x(y-1) + 4(y-1)} = \frac{(x-7)(y+1)}{(x+4)(y-1)}$$

Entonces: $\int \frac{y-1}{y+1}\, dy = \int \left(\frac{x-7}{x+4}\right) dx$.

Por una parte,

$$\int \frac{y-1}{y+1}\, dy = \int \frac{y+1-2}{y+1}\, dy = \int 1 - \frac{2}{y+1}\, dy = y - 2\log|y+1| + C_1$$

$$\int \frac{x-7}{x+4}\, dx = \int \frac{x+4-11}{x+4}\, dx = \int 1 - \frac{11}{x+4}\, dx = x - 11\log|x+4| + C_2$$

Entonces: $y - 2\log|y+1| = x - 11\log|x+4| + C_3$

o bien: $\boxed{\frac{e^y}{(y+1)^2} = C\frac{e^x}{(x+4)^{11}}}$ No puede resolverse para $y = y(x)$)

(b) $(4x^2 + 2y + 2y^2) + (x + 2xy)\frac{dy}{dx} = 0$.

Veamos si es exacta: $N_x = \frac{\partial}{\partial x}(x + 2xy) = 1 + 2y$

$M_y = \frac{\partial}{\partial y}(4x^2 + 2y + 2y^2) = 2 + 4y$

No es exacta.

-1-

Si $\mu = \mu(x,y)$ es factor integrante.

$$\mu M(x,y) + \mu N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

y se debe cumplir,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu N) = \frac{\partial}{\partial y}(\mu M) \Rightarrow \mu_x N + \mu N_x = \mu_y M + \mu M_y.$$

Si $\mu = \mu(x)$, $\mu_y = 0$:

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{M_y - N_x}{N}$$ debe ser función de $x$ únicamente,

Veamos:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(2+4y)-(1+2y)}{x+2xy} = \frac{1+2y}{x(1+2y)} = \frac{1}{x} \checkmark$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x) = x.$$

Entonces. $(4x^3 + 2xy + 2xy^2) + x^2(1+2y)\frac{dy}{dx} = 0$

es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2(1+2y)) = 2x(1+2y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^3 + 2xy + 2xy^2) = 2x + 4xy = 2x(1+2y) \checkmark$$

Entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x^3 + 2xy(1+y) \Rightarrow F(x,y) = x^4 + x^2y(1+y) + h(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2(1+2y) \Rightarrow F(x,y) = x^2(y+y^2) + g(x)$$

$$\Rightarrow g(x) = x^4 \text{ and } h(y) = \text{const.} \quad F(x,y) = x^4 + x^2y(1+y)$$

$$\Rightarrow \boxed{x^4 + x^2y(1+y) = C}$$ Implicit solution.

(c) $3y' + 2xy = xy^{-2}$ es una ecuación de Bernoulli

Definir: $v = y^{\alpha}(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \alpha y^{\alpha-1} \frac{dy}{dx} = \alpha y^{\alpha-1}\left(-\frac{2}{3}xy + \frac{xy^{-2}}{3}\right)$
$= y^{1-n}(x)$

$= \alpha y^{\alpha-1} = -\frac{2}{3}\alpha x y^{\alpha} + \frac{\alpha}{3} x y^{\alpha-3} = -\frac{2}{3}\alpha x v + \frac{\alpha}{3} x y^{\alpha-3}$

Escogemos $\alpha - 3 = 0$ tenemos $\boxed{\alpha = 3} \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{2}{3} \cdot 3xv + \frac{3}{3}x$.

$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + 2xv = x$. $\boxed{\alpha = 1-n}$ $(n = -2 \Rightarrow \alpha = 3)$

The integrating factor is $\mu(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

$$e^{x^2}\frac{dv}{dx} + 2xe^{x^2}v = xe^{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2}dv\right) = xe^{x^2} \Rightarrow e^{x^2}v = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

$$\Rightarrow \boxed{v(x) = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}}. \text{ Pero: } v = y^{\alpha} = y^3$$

$$\Rightarrow y = \sqrt[3]{v} \Rightarrow \boxed{y(x) = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + Ce^{-x^2}}}$$

Nota: La ec. $\frac{dv}{dx} + 2xv = x$ también es separable

$$\int \frac{dv}{1-2v} = \int x\,dx \Rightarrow -\frac{1}{2}\operatorname{Log}|1-2v| = \frac{1}{2}x^2 + C_1$$

$\operatorname{Log}|1-2v| = -x^2 + C_2 \Rightarrow 1-2v = C_3e^{-x^2} \Rightarrow 1 - C_3e^{-x^2} = +2v$
$\Rightarrow \boxed{v = \frac{1}{2} + Ce^{-x^2}}$

② Este es un problema de enfriamiento de Newton:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Aquí $T_a = 21°C$, y la solución a la ecuación es

$$T(t) = Ke^{-kt} + T_a = (Ke^{-kt} + 21°)C$$

Sabemos

$$5°C = T(0) = K + T_a \Rightarrow K = 5 - T_a = 5 - 21 = -16\ °C.$$

$$\Rightarrow T(t) = (-16e^{-kt} + 21)°C.$$

Falta determinar $k$: Sabemos que: $T(3) = 10°C$.

Entonces $-16e^{-3k} + 21 = 10°C$.

$$-16e^{-3k} = -11$$

$$\Rightarrow 11 = 16e^{-3k} \Rightarrow e^{3k} = \frac{16}{11} \Rightarrow 3k = \ln\left(\frac{16}{11}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{3}\ln\frac{16}{11} \approx 0.1249\ \frac{1}{\text{min}}}$$

$$\Rightarrow T \quad e^{-kt} = e^{-\frac{1}{3}\left(\ln\frac{16}{11}\right)t} = e^{\ln\left(\frac{16}{11}\right)^{-t/3}} = \left(\frac{16}{11}\right)^{-t/3}$$

$$\Rightarrow \boxed{T(t) = -16\left(\frac{16}{11}\right)^{-t/3} + 21°C}$$

3+6min = 9min

$$T(9) = -16\left(\frac{16}{11}\right)^{-9/3} + 21°C = -16\left(\frac{11}{16}\right)^{3} + 21 = -\frac{11^3}{16^2} + 21$$

$$= \cancel{120 - \frac{60}{9} = \frac{180-60}{9} = \frac{120}{9}\ °C} \Rightarrow \boxed{T \approx 15.8°C}$$

③ Determinar la solución general de la Ec. Dif,

$$x^2y'' + xy' - 4y = 0,$$

considerando que $y_1(x) = x^2$ es una solución.

Busquemos una solución en la forma:

$$y_2(x) = v(x)\, y_1(x).$$

Entonces: $y_2' = v'y_1 + vy_1'$

$$y_2'' = v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1''.$$

Substituyendo: en la ecuación.

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0.$$

$$p(x)(v''y_1 + 2v'y_1' + vy_1'') + q(x)(v'y_1 + vy_1') + r(vy_1) = 0$$

$$v''(py_1) + v'(2py_1' + qy_1) + v\underbrace{(py_1'' + qy_1' + ry_1)}_{=0.} = 0$$

$$\Rightarrow (py_1)v'' + (2py_1' + qy_1)v' = 0$$

$$(x^2 \cdot x^2)v'' + (2x^2 \cdot 2x + x \cdot x^2)v' = 0$$

$$x^4v'' + 5x^3v' = 0$$

Si $x \neq 0$: $\dfrac{v''}{v'} = -\dfrac{5}{x} \Rightarrow \log v' = -5 \log x.$

$\Rightarrow v'(x) = x^{-5} \Rightarrow v(x) = -\dfrac{1}{4}x^{-4} \Rightarrow y_2(x) = x^{-4}x^2$

$\boxed{y(x) = C_1x^2 + C_2x^{-2}}$ $\qquad = 5 = \qquad$ $\boxed{y_2(x) = x^{-2}}$.

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Examen de Recuperación Trimestre 19-I Vespertino.

[4] Utilizando el método de coeficientes indeterminados, resuelva: $y'' - y' + \frac{1}{4}y = e^{x/2}$.

Primero resolvemos la ecuación homogénea.

$$y_h'' - y_h' + \frac{1}{4}y_h = 0.$$

$$y_h(x) = e^{rx} \Rightarrow r^2 - r + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$$

$$b^2 - 4ac = 1 - 4\cdot 1\cdot \frac{1}{4} = 0$$

$$y_h(x) = (C_1 + C_2 x)e^{x/2}$$

Proponemos $Y(x) = Ae^{x/2}$, pero como la raíz es repetida:

$$y_p(x) = Ax^2 e^{x/2}.$$

Calculemos.

$$y_p'(x) = A\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)e^{x/2}$$

$$y_p''(x) = A\left(\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2\right)e^{x/2}$$

Sustituyendo:

$$A\left(\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2\right)e^{x/2} - A\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)e^{x/2} + \frac{1}{4}Ax^2e^{x/2} = e^{x/2}$$

i.e. $$A\left(\left(\cancel{\frac{1}{4}x^2} + \cancel{2x} + 2\right) - \cancel{\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x\right)} + \cancel{\frac{1}{4}x^2}\right)e^{x/2} = e^{x/2}$$

$$2A = 1. \Rightarrow \boxed{A = \frac{1}{2}}$$

La solución es: $\boxed{y(x) = (C_1 + C_2x)e^{x/2} + \frac{1}{2}x^2 e^{x/2}}$

$\boxed{5}$ Resuelve la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + 4y = \tan(2x)$$

---

Esta ecuación la resolvemos con variación de parámetros:

Primero resolvemos la ecuación homogénea:

$$y_h'' + 4y_h = 0 \qquad\qquad y_1(x) = \cos(2x)$$

$$y_h(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) \qquad \text{Sean: } y_2(x) = \sin(2x).$$

Calculemos el Wronskiano:

$$W[y_1,y_2](x) = \det\begin{pmatrix} \cos(2x) & \sin(2x) \\ -2\sin(2x) & 2\cos(2x) \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Usando las fórmulas, con $a(x) = 1$, $f(x) = \tan(2x)$:

$$A(x) = -\int \frac{f(x)\,y_2(x)}{a(x)\,W[y_1,y_2]}\,dx = -\frac{1}{2}\int \tan(2x)\sin(2x)\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{\sin^2(2x)}{\cos(2x)}\,d$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1-\cos^2(2x)}{\cos(2x)}\,dx = -\frac{1}{2}\int \sec(2x) - \cos(2x)\,dx.$$

$$= -\frac{1}{2}\int \sec(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\ln|\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

$$B(x) = \int \frac{f(x)\,y_1(x)}{a(x)\,W[y_1,y_2]}\,dx = \frac{1}{2}\int \tan(2x)\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx$$

$$= -\frac{1}{4}\cos(2x).$$

La solución particular resulta ser:

$$y_p(x) = A(x)\, y_1(x) + B(x)\, y_2(x)$$

$$= \left(-\frac{1}{2} \ln|\sec 2x + \tan 2x| + \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\cos(2x) +$$

$$+ \left(-\frac{1}{4}\cos(2x)\right)\sin(2x)$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{2} \ln|\sec x + \tan x|.$$

Entonces, la solución es:

$$\boxed{y(x) = C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x) - \frac{\cos(2x)}{4} \ln|\sec x + \tan x|}$$

⑥. Body with weigth $w = 32 lb$.
The spring is stretched $L = 3 in = 3 \frac{1}{12} ft$.
ie $L = \frac{1}{4} ft$.

Use Hooke's law: $F = kL$, to find $k$.
Hence, $F = w = 32 lb$. $\Rightarrow$ $32 = k \cdot \frac{1}{4} \Rightarrow 128$

$\Rightarrow$ $\boxed{k = 128 \frac{lb}{ft}}$

Next body: $w = 16 lb$. Now, the relation between mass and weigth (gravitational force) is:

$$mg = w$$

Now, $g = 32 ft/sec^2$ $\Rightarrow$ $m = \frac{w}{g} = \frac{16}{32} \frac{lb}{ft} \cdot sec^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{m = \frac{1}{2} \text{ slug}}$

There is no friction: $b = 0 \frac{lb \cdot sec}{ft}$.

The eqn of motion is: $m\ddot{y} + ky = 0$

ie. $\boxed{\frac{1}{2}\ddot{y} + 128y = 0}$

with Initial conditions: $y(0) = -\frac{1}{4} ft$
$\left(-\frac{1}{4} ft = -3 in\right)$ $\dot{y}(0) = 1 ft/sec$.

(b) The solution to the eq'n: $\ddot{y} + 256y = 0$

$$y(t) = C_1 \cos(16t) + C_2 \sin(16t)$$

Using the initial conditions: $y(0) = C_1$

$$\dot{y}(0) = 16\,C_2$$

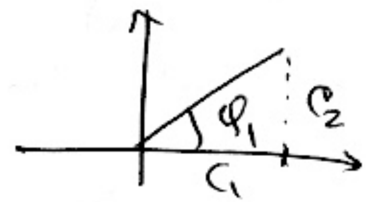
$$\Rightarrow C_1 = -1/4 \text{ ft} \; ; \; C_2 = \frac{\dot{y}(0)}{16} = \frac{1 \text{ ft/sec}}{16(1/\text{sec})} = \frac{1}{16} \text{ ft.}$$

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}\cos(16t) + \frac{1}{16}\sin(16t)}$$

We can write this sol'n as: $y(t) = A\cos(16t - \varphi)$

where $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$

and $\tan\varphi = \dfrac{C_2}{C_1}$




$$A = \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{16}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16^2}} = \frac{\sqrt{17}}{16} \text{ ft.}$$

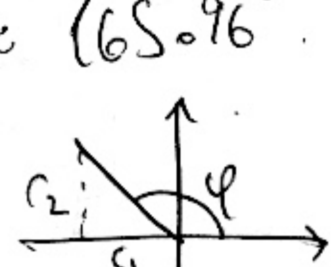
and $\varphi = \text{Arctan}\left(\dfrac{C_2}{C_1}\right) + \pi$ (since $C_1 < 0$).

$$\varphi = \text{Arctan}\left(\frac{1/16}{-1/4}\right) + \pi = \text{Arctan}\left(-\frac{4}{16}\right) + \pi$$

i.e.

$$\varphi = -\text{Arctan}\left(\frac{1}{4}\right) + \pi \approx +2.89 \text{ rad} \approx 165.96^\circ$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{\sqrt{17}}{16}\cos(16t - 2.89)}$$




$\left.\begin{array}{l} y(t) = 0 \\ \dot{y}(t) < 0 \end{array}\right\}$ when $16t - 2.89 = \dfrac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \boxed{t \approx 0.28 \text{ sec.}}$