UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
TRIMESTRE: PRIMAVERA DE 2019.

EXAMEN # 3.

FECHA DE ENTREGA: **LUNES 25 DE NOVIEMBRE DE 2019,** A LAS 4:00 PM

Nombre: ANSWER KEY

Instrucciones:

- El examen consta de **DOS** problemas de **50 puntos** cada uno. Resuélvalos todos.
- Entréguelo en la fecha y hora señaladas.
- Para recibir puntaje, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE. Muestre sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.
- **Asegúrese de entender bien lo que entrega pues le preguntaré de forma personal.**

PROBLEMAS

(1) (**50 puntos**). Un cuerpo de masa $m = 1$ kg, al ser colgado a un resorte, lo estira una distancia de $49/320$ metros. Si adicionalmente el cuerpo se lleva a una posición de $1/4$ metros debajo de la posición de equilibrio y luego se suelta, encuentre la posición del cuerpo (respecto al equilibrio) como función del tiempo t. Encuentre también frecuencia, amplitud y desfasamiento del sistema. Suponga que la aceleración de gravedad tiene el valor $g = 9.8$ m/seg^2 y que la resistencia al aire es despreciable.

(2) (**50 puntos**). Un sistema masa-resorte con amortiguamiento tiene las siguientes propiedades:

(a) la constante de fricción, b, es 6 veces la masa m;

(b) la constante de Hooke, k, es 9 veces la masa m.

Al tiempo inicial, $t = 0$, la masa se encuentra en la posición de equilibrio y en reposo, y se comienza a aplicar una fuerza externa $f(t) = 3\sin(3t)$. También se sabe que si el resorte se estira 5 metros, se rompe. Si se pone una masa de $m = 2$ kg, ¿se romperá el resorte?

UAM-AZCAPOTZALCO Examen #3 | Lunes, Noviembre 25, 2019

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDOs)

ANSWER KEY. Examen #3

(1) First, we have to determine Hooke's constant by

$$kL = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{L} = \frac{1\,kg\; 9.8\,(m/sec^2)}{49/320\,m} = 64\,\frac{kg}{sec^2}$$

$$\boxed{k = 64\,\frac{N}{m}}$$

There is no friction and there are no external forces, $b = 0$, $f(t) \equiv 0$, the equation of motion is:

$$m\ddot{y} + ky = 0 \implies \ddot{y} + 64y = 0$$

with IC's $y(0) = -\frac{1}{4}\,m$, $\dot{y}(0) = 0$.

The general solution

$$y(t) = C_1 \cos(8t) + C_2 \sin(8t)$$

At $t=0$ $\quad y(0) = C_1 = -\frac{1}{4}\,m \Rightarrow \boxed{C_1 = -1/4\,m}$

$$\dot{y}(0) = \left(-8C_1 \sin 8t + 8C_2 \cos 8t\right)\Big|_{t=0} = 8C_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C_2 = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{y_1(t) = -\frac{1}{4}\cos(8t)}$$

Frequency $\boxed{\omega = 8\,1/sec}$

Amplitude $\boxed{A = \frac{1}{4}\,m}$

There is no phase-shift

(2). Since we have friction and an external force, the equation of motion is.

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = f(t),$$

where m = mass.

$b = 6m$

$k = 9m$

$f(t) = 3\sin(3t)$

Then

$$m\ddot{y} + 6m\dot{y} + 9my = 3\sin 3t$$

i.e.

$$\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = \frac{3}{m}\sin(3t)$$

<u>Step (1)</u> solve the homogeneous Diff Eq.

$$\ddot{y}_h + 6\dot{y}_h + 9y_h = 0.$$

$$\Rightarrow r^2 + 6r + 9 = 0 \Rightarrow (r+3)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = -3$$

$$\Rightarrow y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-3t}$$

<u>Step (2)</u> Find a particular solution.

$$y_p(t) = A\cos(3t) + B\sin(3t)$$

This is <u>judicious</u>, since no homogeneous solution is repeated. Then

$$\dot{y}_p = -3\left(A\sin(3t) - B\cos(3t)\right)$$

$$\ddot{y}_p = -9\left(A\cos(3t) + B\sin(3t)\right)$$

$$= -9y_p$$

Substitute into the equation.

$$-9y_p + 6(-3)\left(A\sin(3t) - B\cos(3t)\right) + 9y_p = \frac{3}{m}\sin(3t)$$

i.e.

$$-18A\sin 3t + 18B\cos 3t = \frac{3}{m}\sin(3t)$$

Then $-18A = \frac{3}{m}$ and $18B = 0 \Rightarrow B = 0$ and $A = -\frac{1}{6m}$

Therefore, the general solution is.

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-3t} - \frac{1}{6m}\cos(3t)$$

Now: $\dot{y}(t) = C_2 e^{-3t} + (-3)(C_1 + C_2 t)e^{-3t} + \frac{1}{2m}\sin(3t)$

At $t=0$, $y(0)=0$ and $\dot{y}(0)=0$.

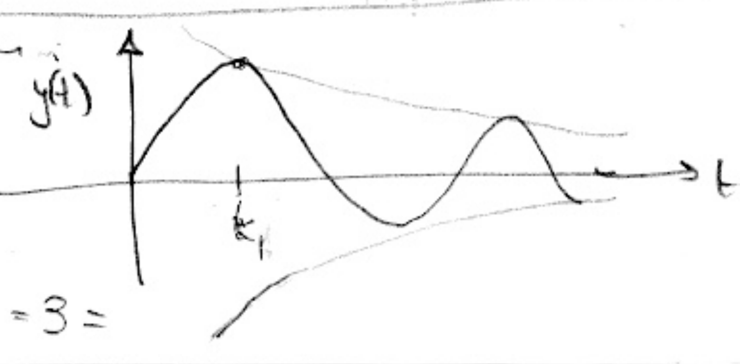
$$C_1 - \frac{1}{6m} = 0 \qquad C_1 = \frac{1}{6m}$$

$$C_2 - 3C_1 = 0 \qquad C_2 = 3C_1 = \frac{1}{2m}.$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \left(\frac{1}{6m} + \frac{1}{2m}t\right)e^{-3t} - \frac{1}{6m}\cos(3t)$$

i.e. $\boxed{y(t) = \frac{1}{6m}\left((1+3t)e^{-3t} - \cos(3t)\right)}$

This function has the form:



Hence, the first time, t_1, is where it has maximum of all $y(t)$, since it is decreasing

So, we have to compute $\frac{dy}{dt}$, and we know that

$\frac{dy}{dt}(t_1) = 0$ and $y(t_1) = \max y(t)$.

$$\dot{y}(t) = \frac{3}{\cancel{6m}} e^{-3t} + \frac{-3}{\cancel{6m}}(1+3t)e^{-3t} + \frac{3}{6m}\sin(3t)$$

$$= -\frac{9}{6m} t e^{-3t} + \frac{3}{6m}\sin(3t)$$

$$= -\frac{3}{2m} t e^{-3t} + \frac{1}{2m}\sin(3t)$$

$$= \frac{1}{2m}\left(\sin(3t) - 3te^{-3t}\right) = 0$$

Then $\sin(3t) - 3te^{-3t} = 0$

Using WolframAlpha, ~~the~~ first roots are $t_1 = 0.9969$;

$t_2 = 2.0982$; $t_3 = 3.1413$; $t_4 = 4.1888$, ...

and there are infinitely many, and $y(t)$ reaches its extrems there. The first one corresponds to a max.

Thence.

$$y(t_1) = \frac{1}{6m}\left[(1+3t_1)e^{-3t_1} - \cos(3t_1)\right]$$

$$= \frac{1}{6m}\left[1.18917893 35152...\right]$$

If $m = 2$ kgs $\Rightarrow$ $y(t_1) = \frac{0.9085}{12} = 0.08 < 5$ mts

Then, the spring does not break.