EXAMEN DE RECUPERACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trimestre 19-P. Turno vespertino. TJ- Dec | 05/2019.

Alumna(o): SOLUTION KEY. Matrícula:

Todas las respuestas deberán incluir su procedimiento. No se permite el uso de formulario.

1. **(1.25 puntos)** Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(1-\cos x)y' + e^{-y}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0.$$

2. **(1.25 puntos)** Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = y^2 ln\, x.$$

3. **(1.0 puntos)** Una solución salina entra a razón constante de 5 litros/min. en un tanque con capacidad de 700 litros, el cual en un principio contenía 100 litros de agua en que se disolvieron 50 kg. de sal. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale a razón de 3 litros/min. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de 0,2 kg/litro, determine la cantidad de sal en el instante en que el nivel tenga 600 litros.

4. **(1.0 puntos)** Encuentre la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{5}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{9}{t^2}y = 0.$$

si sabemos que t^3 es solución.

5. **(1.25 puntos)** Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 5y' - 36y = xe^{3x}$$

6. **(1.25 puntos)** Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = t^2e^{-2t}.$$

7. **(1.5 puntos)** Un cuerpo de masa $m = 1$ kg, al ser colgado a un resorte, lo estira una distancia de $49/320$ metros. Si adicionalmente el cuerpo se lleva a una posición de $1/4$ metros debajo de la posición de equilibrio y luego se suelta, encuentre la posición del cuerpo (respecto al equilibrio) como función del tiempo t. Encuentre también frecuencia, amplitud y desfasamiento del sistema. Suponga que la aceleración de gravedad tiene el valor $g = 9{,}8$ m/seg^2 y que la resistencia al aire es despreciable.

8. **(1.5 puntos)** Un sistema masa-resorte con amortiguamiento tiene las siguientes propiedades:

   - la constante de fricción, b, es 6 veces la masa $m = 2$ kg.
   - la constante de Hooke, k, es 9 veces la masa $m = 2$ kg.

   Al tiempo inicial $t = 0$, la masa m se encuentra en la posición de equilibrio en reposo, y se comienza a aplicar una fuerza externa

$$f(t) = 3\operatorname{sen}(3t)$$

   a) Establecer la ecuación diferencial que modela el movimiento del cuerpo y las condiciones iniciales.

   b) Resolver la ecuación diferencial para determinar el desplazamiento del cuerpo como una función del tiempo.

UAM - Azcapotzalco Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Examen de Recuperación. Trimestre: Primavera 2019

Vespertino MP 4 de diciembre de 2019

Soluciones.

(1) $(1-\cos x)y' + e^{-y}\sin x + \sin x = 0$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{(e^{-y}+1)\sin x}{1-\cos x} \Rightarrow \int \frac{e^{y}}{1+e^{y}}\,dy = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x - 1}$$

$u = 1+e^{y}$, $v = \cos x - 1$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{u}\,du = -\int \frac{1}{v}\,dv \Rightarrow \operatorname{Log}|u| = -\log|v| + C_1$$

$$\Rightarrow u = C_2 v^{-1} \Rightarrow 1+e^{y} = C_2(\cos x - 1)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = \ln\left|\frac{C_2}{\cos x - 1} - 1\right|}$$

(2) Es una ecuación de Bernoulli con $n=2$:

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = y^2 \ln x$$

Tomamos $v = y(x)^{1-n} = y^{-1}(x) \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} + \frac{2v}{x} = -\frac{\ln x}{x}.$$

Factor integrante: $\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{2 \ln x} = x^2.$

$$\int \mu(x) f(x)\, dx = \int x^2 \left(-\frac{\ln x}{x}\right) dx = -\int x \ln x\, dx$$

Partes

$$\overset{\downarrow}{=} -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{2}\int x\, dx = -\frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}(1 - 2\ln x)$$

Así:

$$v(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x) f(x)\, dx + \frac{\tilde{C}}{\mu(x)} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{4}(1-2\ln x)\right) + \frac{\tilde{C}}{x^2} = \frac{1}{4x^2}\left[x^2(1-2\ln x) + 4\tilde{C}\right]$$

y por tanto,

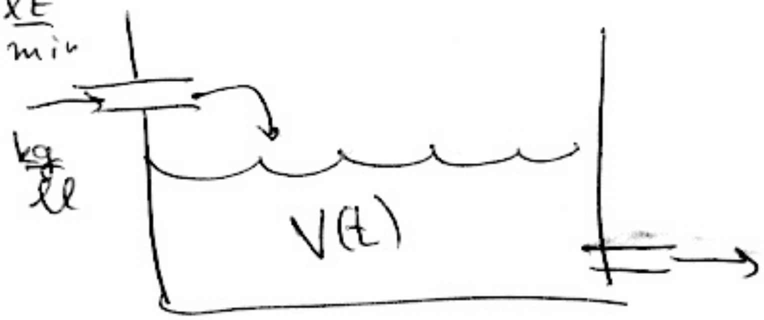
$y(x) = v^{-1}(x)$ $\qquad 4\tilde{C} = C$

$$\boxed{y(x) = \frac{4x^2}{x^2(1-2\ln x) + C}}$$

③. $M(t)$ = Masa de sal en el contenedor al tiempo t.
$V(t)$ = Volumen de agua en el contenedor al tiempo t.

Flujo $= 5 \frac{lt}{min}$

Concentración: $\frac{2}{10} \frac{kg}{lt}$



Flujo salida $3 \frac{lt}{min}$

$C(t) = \frac{M(t)}{V(t)} \frac{kg}{lt}$

Concentración de salida.

$$\text{Velocidad de entrada de la masa} = \begin{pmatrix}\text{Flujo}\\ \text{entrada}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Concentración}\\ \text{Entrada}\end{pmatrix} = \left(5 \frac{lt}{min}\right)\left(\frac{2}{10} \frac{kg}{lt}\right) = 1 \frac{kg}{min}$$

$$\text{Velocidad de salida de la masa} = \begin{pmatrix}\text{Flujo}\\ \text{salida}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{Concentración}\\ \text{salida}\end{pmatrix} = \left(\frac{3lt}{min}\right) \cdot \left(\frac{M(t)}{V(t)} \frac{kg}{lt}\right)$$

$$= 3\frac{M(t)}{V(t)} \cdot \frac{kg}{min}.$$

$$\begin{pmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{cambio de Masa}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Velocidad de}\\ \text{entrada}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Velocidad}\\ \text{de salida}\end{pmatrix}$$

$$\frac{dM}{dt} = 1 - \frac{3}{V(t)}M(t) \implies \boxed{\frac{dM}{dt} + \frac{3}{V(t)}M = 1}$$

Falta encontrar $V(t)$. Sabemos que $\frac{dV}{dt} = 5\frac{lt}{min} - \frac{3lt}{min}$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 2 \frac{lt}{min} \Rightarrow V(t) = 2t + C.$$

Como $V(0) = 100\ lt \Rightarrow C = 100 \Rightarrow \boxed{V(t) = 2(t+50)}$

Entonces, la Ec. Dif es $\boxed{\frac{dM}{dt} + \frac{3}{2(t+50)}M = 1}$

El factor integrante es:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{2(t+50)} dt} = (t+50)^{3/2}$$

Calcular

$$\int \mu(t) f(t)\, dt = \int (t+50)^{3/2} \cdot 1\, dt = \frac{2}{5}(t+50)^{5/2}$$

La solución es dada por:

$$M(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) f(t)\, dt + \frac{c}{\mu(t)}.$$

$$\boxed{M(t) = \frac{2}{5}(t+50) + \frac{c}{(t+50)^{3/2}} \text{ kg}}$$

En $t=0$, $M(0) = 50$ kg:

$$\frac{2}{5}(50) + \frac{c}{(50)^{3/2}} = 50.$$

$$C = 30 \cdot 50^{3/2} \approx 10{,}606.$$

Si $V(t) = 600 \text{ lt} = 2(t+50) \Rightarrow \boxed{t = 250 \text{ min}}$

Entonces

$$M(250) = \frac{2(300)}{5} + \frac{c}{(300)^{3/2}} = 120 + 2{,}04$$

$$\boxed{M(250) = 122.04 \text{ kg}}.$$

(4) $y_1 = t^3$, es solución. Proponer $y_2(t) = v(t) y_1(t)$.

i.e. $y_2(t) = t^3 v(t)$. Calcular derivadas y sustituir en la Ecuación diferencial

$$\frac{dy_2}{dt}(t) = 3t^2 v + t^3 v'(t) \; ; \; \frac{d^2 y_2}{dt^2} = 6tv + 6tv' + t^3 v''$$

se obtiene:

$$t^3 v'' + t^2 v' = 0. \quad \text{Si} \quad v' = V(t):$$

tenemos: $\frac{dV}{dt} + \frac{1}{t} V = 0 \Rightarrow \int \frac{dV}{V} = -\int \frac{1}{t} dt.$

$$\Rightarrow \ln V(t) = -\ln|t| \Rightarrow V(t) = -\frac{1}{t} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow v(t) = \ln t. \Rightarrow y_2(t) = t^3 \ln t$$

La solución general es:

$$\boxed{y(t) = C_1 t^3 + C_2 t^3 \ln t.}$$

(5) Ecuación Diferencial $y'' + 5y' - 36y = xe^{3x}$

Ecuación homogénea $y'' + 5y' - 36y = 0$

$$r^2 + 5r - 36 = 0$$

$$r_1 = 4, \quad r_2 = -9$$

$$y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-9x}$$

Solución particular: Coeff. indeterminados

$$y_p(x) = (Ax + B)e^{3x}$$

$$y_p'(x) = (3Ax + A + 3B)e^{3x}$$

$$y_p''(x) = (9Ax + 6A + 9B)e^{3x}$$

Substituir en la Ecuación:

$$(9Ax + 6A + 9B)e^{3x} + 5(3Ax + A + 3B)e^{3x} - 36(Ax + B)e^{3x} = xe^{3x}$$

$$\Rightarrow -18Ax + (11A - 18B) = x$$

$$\Rightarrow -18A = 1 \; ; \; 11A - 18B = 0$$

$$A = \frac{-1}{18} \; ; \; B = -\frac{11}{18^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-9x} - \frac{1}{18}x - \frac{11}{18^2}}$$

(6) Encontrar la solución particular de

$$y'' - 4y' + 4y = t^2 e^{-2t}.$$

Ecuación homogénea $y'' - 4y' + 4y = 0$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$(r-2)^2 = 0 \qquad r_1 = r_2 = 2$$

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{2t} \qquad y_1(t) = e^{2t}$$

$$y_2(t) = te^{2t}.$$

Solución particular: Variación de parámetros.

$$W[y_1, y_2] = \det \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & (1+2t)e^{2t} \end{pmatrix} = e^{4t}.$$

$$A(t) = -\int \frac{(te^{2t})(t^2 e^{-2t})}{e^{4t}}\, dt = -\int t^3 e^{-4t}\, dt$$

$$= e^{-4t}\left(\frac{t^3}{4} + \frac{3}{16}t^2 + \frac{3}{32}t + \frac{3}{128}\right).$$

$$B(t) = \int \frac{e^{2t}(t^2 e^{-2t})}{e^{4t}}\, dt = \int t^2 e^{-4t}\, dt$$

$$= -\left(\frac{t^2}{4} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{32}\right)e^{4t}.$$

Solución particular $y_p(t) = A(t)y_1(t) + B(t)y_2(t)$

$$\boxed{y_p(t) = \frac{1}{16}\left(t^2 + t + \frac{3}{8}\right)e^{2t}}$$

(7) Para encontrar la constante de Hooke:

$$\text{Peso} = \text{Fuerza} = k \cdot L. \Rightarrow mg = kL$$

$$k = \frac{mg}{L} = \frac{(1\,kg)(9.8\,m/seg^2)}{(49/320)\,m} = 64\,\frac{N}{m}.$$

Como la fricción es despreciable: $my'' + ky = 0$

$$y'' + 64y = 0$$

$$\boxed{y(t) = C_1 \cos(8t) + C_2 \sin(8t)}$$

Condiciones iniciales $y(0) = -\frac{1}{4}\,m$ $\quad C_1 + 0 = -\frac{1}{4}$

$\dot{y}(0) = 0\,m/seg.$ $\quad 0 + 8C_2 = 0.$

$C_1 = -1/4\,m$, $C_2 = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{y(t) = -\frac{1}{4}\cos(8t)}$

O bien $\boxed{y(t) = \frac{1}{4}\cos(8t - \pi)}.$

$A = \text{Amplitud} = \frac{1}{4}\,m$

$\omega = \text{Frecuencia angular} = 8\ 1/seg$

$\nu = \text{Frecuencia}$ $\quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{\pi}\ 1/seg$

$P = \text{Periodo} = \frac{1}{\nu} = \frac{\pi}{4}\,seg.$

$\varphi = \text{Desfasamiento} = \pi.$

(8) $b = 6m$, $k = 9m$, $m = 2\,kg$.

Ecuación de movimiento:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(2t).$$

Ecuación homogénea:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 9y = 0 \Rightarrow r^2 + 6r + 9 = 0$$

$$(r_1+3)^2 = 0 \quad \boxed{r_1 = r_2 = -3}$$

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-3t}.$$

Solución particular $y_p(t) = A\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t)$

Sustituir en la ecuación:

$$3(-A\operatorname{sen}3t + B\cos 3t) = \frac{3}{2}\operatorname{sen}(3t)$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 0} \quad \boxed{B = \frac{1}{2}}$$

Solución general: $y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-3t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(3t)$

Condiciones iniciales: $y(0) = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = 0}$

$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \dot{y}(0) = C_2 + \frac{3}{2} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = -\frac{3}{2}t\,e^{-3t} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}(3t)}$$

EXAMEN DE RECUPERACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES

Trimestre 19-P. Turno vespertino. W- Dec | 05/2019.

Alumna(o): SOLUTION KEY. Matrícula:

Todas las respuestas deberán incluir su procedimiento. No se permite el uso de formulario.

1. **(1.25 puntos)** Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(1-\cos x)y' + e^{-y}\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0.$$

2. **(1.25 puntos)** Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} - 2y = y^2 ln\, x.$$

3. **(1.0 puntos)** Una solución salina entra a razón constante de 5 litros/min. en un tanque con capacidad de 700 litros, el cual en un principio contenía 100 litros de agua en que se disolvieron 50 kg. de sal. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale a razón de 3 litros/min. Si la concentración de sal en la solución que entra al tanque es de $0{,}2$ kg/litro, determine la cantidad de sal en el instante en que el nivel tenga 600 litros.

4. **(1.0 puntos)** Encuentre la solución general de

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{5}{t}\frac{dy}{dt} + \frac{9}{t^2}y = 0.$$

si sabemos que t^3 es solución.

5. **(1.25 puntos)** Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + 5y' - 36y = xe^{3x}$$

6. **(1.25 puntos)** Encuentre la solución particular de la ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 4\frac{dy}{dt} + 4y = t^2e^{-2t}.$$

7. **(1.5 puntos)** Un cuerpo de masa $m = 1$ kg, al ser colgado a un resorte, lo estira una distancia de $49/320$ metros. Si adicionalmente el cuerpo se lleva a una posición de $1/4$ metros debajo de la posición de equilibrio y luego se suelta, encuentre la posición del cuerpo (respecto al equilibrio) como función del tiempo t. Encuentre también frecuencia, amplitud y desfasamiento del sistema. Suponga que la aceleración de gravedad tiene el valor $g = 9{,}8$ m/seg^2 y que la resistencia al aire es despreciable.

8. **(1.5 puntos)** Un sistema masa-resorte con amortiguamiento tiene las siguientes propiedades:

- la constante de fricción, b, es 6 veces la masa $m = 2$ kg.
- la constante de Hooke, k, es 9 veces la masa $m = 2$ kg.

Al tiempo inicial $t = 0$, la masa m se encuentra en la posición de equilibrio en reposo, y se comienza a aplicar una fuerza externa

$$f(t) = 3\operatorname{sen}(3t)$$

a) Establecer la ecuación diferencial que modela el movimiento del cuerpo y las condiciones iniciales.

b) Resolver la ecuación diferencial para determinar el desplazamiento del cuerpo como una función del tiempo.