UAM-Azcapotzalco | EDOs I | Viernes, Diciembre 20, 2019

Quiz #1 | Nombre:

Instrucciones. Para recibir puntaje: 0) Responda correctamente
1) Escriba en forma clara y concisa
2) Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden
3) Muestre todas sus cuentas. Simplifique.
4) Explique, argumente y justifique sus respuestas.
5) Problema sin desarrollo, explicación, argumento, o justificación vale cero puntos.

(1) Usando la definición de derivada, determine la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(x)=\sqrt{x+1}$ en el punto $(8,3)$.
Luego determine la linearización de $f(x)$ en dicho punto.

(2) Calcule la integral
$$\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^3}\,dx.$$

(1) $$f'(8)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{8+1+h}-\sqrt{8+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{9+h}-3}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{9+h}-3)}{h}\cdot\frac{(\sqrt{9+h}+3)}{(\sqrt{9+h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{(9+h)-3^2}{h(\sqrt{9+h}+3)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{9+h}+3)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{9+h}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}$$

$$\boxed{f'(8)=\frac{1}{6}}$$

Entonces, la linearización es:
$$L[f](x)=\frac{1}{6}(x-8)+3$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^3}\,dx =$ Changing variables : $x = 6\sec\theta$

$\frac{dx}{d\theta} = 6\sec\theta\tan\theta$

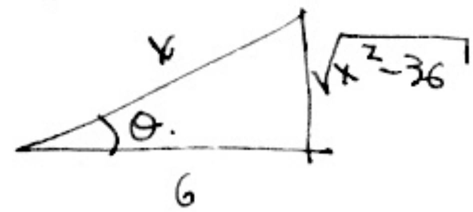
$x^2 - 36 = 36\tan^2\theta$

$$= \int \frac{6\tan\theta}{6^3\sec^3\theta} \cdot 6\sec\theta\tan\theta\,d\theta$$

$$= \frac{36}{6^3}\int \frac{\tan^2\theta}{\sec^2\theta}\,d\theta = \frac{1}{6}\int \tan^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{6}\int \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= \frac{1}{12}\int \left(1-\cos 2\theta\right)d\theta = \frac{1}{12}\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right) = \frac{1}{12}\left(\theta - \sin\theta\cos\theta\right).$$

Now, $\sec\theta = \frac{x}{6} \Rightarrow \cos\theta = \frac{6}{x} \Rightarrow$



Then $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{6}{x}\right)$, $\sin\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{x^2-36}}{x} \cdot \frac{6}{x} = \frac{6\sqrt{x^2-36}}{x^2}$

Hence.

$$\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^3}\,dx = \frac{1}{12}\left(\theta - \sin\theta\cos\theta\right)$$

i.e.

$$\boxed{\int \frac{\sqrt{x^2-36}}{x^3}\,dx = \frac{1}{12}\left(\operatorname{Arccos}\left(\frac{6}{x}\right) - \frac{6}{x^2}\sqrt{x^2-36}\right) + C}$$

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

TRIMESTRE: 19-O