UAM - AZCAPOTZALCO | ECUACIONES DIFERENCIALES | Viernes, Enero 10, 2020

Quiz # 2 | : Nombre: KEY.

Instrucciones: Para recibir puntos:

1) Responda correctamente
2) Escriba en forma clara y concisa
3) Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden.
4) Muestre todas sus cuentas. Simplifique.
5) Explique, argumente y justifique sus respuestas
6) Problemas sin desarrollo, explicación, argumento o justificación, vale cero puntos.

---

(1) Considere la ecuación diferencial $\frac{dy}{dt} = y^3 - y^2 - 12y$

(a) ¿Para qué valores de y, $y(t)$ está en equilibrio? (b) ¿Para qué valores de y, $y(t)$ es creciente? (c) ¿Para qué valores de y, $y(t)$ es decreciente?

---

(2) Encuentre los valores de r para los cuales la ecuación diferencial, $y''' - 3y'' + 2y' = 0$, tiene soluciones de la forma $y = e^{rt}$?

KEY

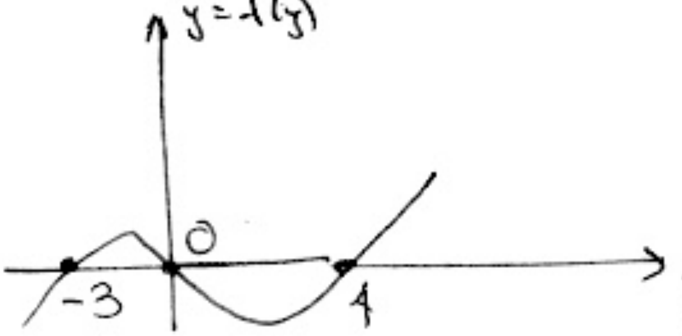
(1). We factor the right-hand-side of the Diff. Eq.

$$\frac{dy}{dt} = y\,(y^2 - y - 12) = y(y-4)(y+3)$$

(a) Equilibrium solutions: $y(t) = \text{const} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = 0$ Then; $y(y-4)(y+3) = 0$ and Equilibrium solutions are

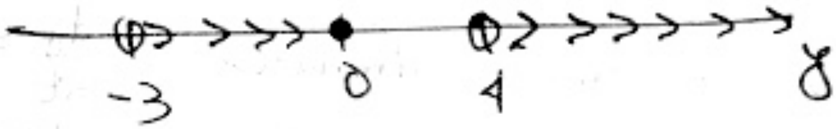
$$y_1(t) = 0$$
$$y_2(t) = -3$$
$$y_3(t) = 4.$$

If we graph $f(y) = y(y-4)(y+3)$



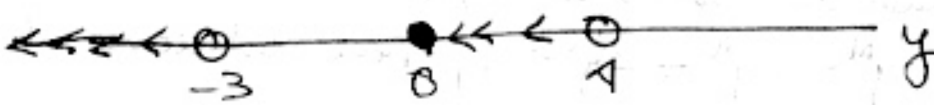
(b) $\dot{y} = f(y) = y(y-4)(y+3) > 0$, if $y \in (-3,0) \cup (0,\infty)$

Then $y(t)$ increases if $y\,(-3,0) \cup (0,\infty)$



(c) $\dot{y} = f(y) = y(y-4)(y+3) < 0$, if $y \in (-\infty,-3) \cup$
$\cup\,(0,4)$

Then, $y(t)$ decreases if $y \in (-\infty,-3) \cup (0,4)$.



---

(2) We assume that $y(t) = e^{rt}$ is solution, so, if we substitute into Diff Eq, it should hold:

$$(e^{rt})''' - 3\,(e^{rt})'' + 2\,(e^{rt})' = 0.$$

i.e. $$r^3 e^{rt} - 3r^2 e^{rt} + 2r e^{rt} = 0$$

Divide by e^{rt}: $$r^3 - 3r^2 + 2r = 0$$

Then, $r(r-2)(r-1) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} r=0 \\ r=1 \\ r=2 \end{array}}$

Then, $r^3 - 3r^2 + 2r = 0$

$$r(r^2 - 3r + 2) = 0$$

$$r(r-2)(r-1) = 0$$

Then, the roots of this equation are:

$$\boxed{r_1 = 0, \quad r_2 = 2, \quad r_3 = 1}$$

This solves the problem.

Now, this generates a new ~~problem~~ questions.

What are then the solutions? They are:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= e^{r_1 t} = 1 \\ y_2(t) &= e^{r_2 t} = e^{2t} \\ y_3(t) &= e^{r_3 t} = e^{t} \end{aligned}}$$