Universidad Autónoma Metropolitana
Casa abierta al tiempo Azcapotzalco

Cálculo Diferencial

CSAI81-15O

Guía del curso

S. Arellano Balderas y J. Cruz Sampedro

Índice

Introducción a los cursos CSAI81

"No hay genios en este mundo, todo es trabajo tenaz,
el uno por ciento es inspiración y el noventa y nueve transpiración."

Thomas Alva Edison (1847-1931)

Bienvenido al SAI

Los profesores de los cursos CSAI81 de Cálculo Diferencial, del *Sistema de Aprendizaje Individualizado* (SAI), te damos la más cordial bienvenida y te deseamos una placentera y exitosa experiencia en este sistema de aprendizaje. Ambos profesores tenemos el compromiso de brindarte todo el apoyo para que aprendas cálculo en un ambiente cordial, responsable y respetuoso, en el que goces de plena libertad y confianza para trabajar activamente: *dialogando, preguntando, argumentando, proponiendo soluciones y resolviendo tus dudas.*

Profesores

Para que tengas un horario amplio de atención y asesorías en SAI, los profesores Salvador Arellano Balderas y Jaime Cruz Sampedro (en sabático) trabajan en equipo: elaboran conjuntamente las guías y exámenes y atienden a los alumnos TODOS LOS DÍAS HÁBILES DEL TRIMESTRE, de 14:30 a 19:00 hrs.

¿Qué es el SAI?

El SAI es un sistema de aprendizaje de constante cooperación y diálogo individual entre profesores y alumnos. Esta modalidad de enseñanza fue propuesta en 1968 por el profesor Fred S. Keller de la Universidad de Arizona en su artículo: *Good bye, teacher ...* [1]. Los cursos en este sistema se dividen en *unidades* adecuadas para que estudies de manera *independiente* y *aprendas a tu ritmo*, apoyado con *abundante asesoría individual por parte de tus instructores.* En el SAI *no asistes a clases* pero *debes asistir regularmente a asesoría* e interactuar continuamente con tus maestros. **¡Cuidado!,** *aprender a tu ritmo* no quiere decir *estudiar solamente al final del trimestre.*

¿Qué no es el SAI?

- No es un sistema de *aprendizaje autodidacta* ni de *enseñanza abierta.*
- Tampoco es un sistema de *cursos en línea* ni de *educación virtual o a distancia.*
- No es una *reguladora* ni un sistema de *clases particulares.*

[1] Keller, F., Good bye, teacher ..., *Journal of Applied Behavior Analysis*, 1968, I, 79-89. http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1310979/

¿Cómo se aprende cálculo en CSAI81?

En CSAI81 aprenderás cálculo realizando las actividades que se especifican en la *guía del curso,* con ASESORÍA Y APOYO PERMANENTE de tus profesores. La guía te indica paso a paso qué materiales debes estudiar y qué ejercicios debes resolver en cada *unidad,* hasta cubrir *todos los temas del curso.* Los profesores supervisarán tus avances y te brindarán *toda la asesoría que necesites* para resolver tus dudas hasta que te sientas listo para *presentar tus exámenes.*

Nuestro **método de enseñanza** se funda esencialmente en:

1. *Abundante asesoría individual:* para que resuelvas tus dudas, profundices en los temas, fortalezcas tu independencia y prepares tus exámenes.

2. *Evaluación de tareas y exámenes en tu presencia:* en CSAI81 todas tus tareas y exámenes se califican en *tu presencia* para que afirmes tus aciertos e inmediata y oportunamente detectes tus errores y resuelvas tus dudas.

3. *Numerosas oportunidades para aprobar las unidades del curso:* SI NO TE VA BIEN EN ALGÚN EXAMEN, en CSAI81 te resolvemos tus dudas, te asignamos tareas para que repases y te damos oportunidad de presentar otro examen de la misma unidad, *hasta que apruebes.* A este proceso se le llama **reciclar.**

4. *Flexibilidad para que aprendas y progreses a tu propio ritmo:* en CSAI81 puedes terminar un curso y empezar con el siguiente o, si has aprobado la quinta unidad, reanudarlo donde te quedaste y completarlo en dos trimestres.

ESTUDIAR CÁLCULO EN CSAI81 PUEDE SER LENTO, ¡PERO ES SEGURO!

Una de nuestras metas fundamentales es que desarrolles tu *autodisciplina*, *seguridad* e *independencia* para alcanzar tus metas académicas y profesionales.

En los cursos CSAI81 queremos convencerte que

¡LA MATEMÁTICA NO ES UN JUEGO DE ESPECTADORES!

Y QUE ¡TÚ PUEDES JUGARLO EXITOSAMENTE!

¿Qué tengo que hacer?

- Descargar e imprimir la guía del curso.
- Leer cuidadosamente la información del curso para el trimestre 15O y familiarizarte con los *horarios de atención* y los *criterios de evaluación.*
- Conseguir el libro de texto y estudiarlo de acuerdo al plan trazado en la guía.
- *¡Asistir al SAI a asesoría cada vez que tengas dudas!*
- Entregar la tarea de la primera unidad correctamente resuelta.
- Presentar tu examen y continuar trabajando bajo la constante supervisión de tus profesores.

Guía y libro de texto

"Sin entusiasmo nunca se logró nada grandioso"

Emerson (1803-1882)

El éxito en el estudio de las matemáticas requiere de *entusiasmo, dedicación y organización. El entusiasmo y la dedicación son tu responsabilidad* pero una buena organización requiere de una *guía,* un *libro de texto* y supervisión, orientación y apoyo por parte de tus profesores.

El propósito de la guía es proveerte un plan de trabajo para que estudies organizadamente y asimiles en un trimestre los contenidos del curso de Cálculo Diferencial.

El **libro de texto** es:

CÁLCULO UNA VARIABLE, de G. B. Thomas, Pearson; 2010, decimosegunda edición.

Para que tu aprendizaje progrese de manera ordenada y sistemática, así como para facilitar la supervisión de tus avances, el curso se ha dividido en *diez unidades.* Cada unidad establece su *contenido,* sus *objetivos* y las *actividades* que debes realizar para preparar los correspondientes exámenes. En cada unidad se detallan los *indicadores de evaluación*, es decir, los temas y habilidades relevantes en las evaluaciones de la unidad. Presta especial atención a esos indicadores porque en gran medida te sugieren el *tipo de problemas y preguntas que encontrarás en los exámenes.*

¡Imprime la guía y adquiere el libro de texto! Es muy importante que dispongas de estos materiales durante todo el trimestre porque –sumados a tu dedicación y al apoyo de tus instructores– serán los principales soportes de tu aprendizaje de cálculo en CSAI81.

Información general del curso

"Donde se cuentan mil zarandajas, tan impertinentes como necesarias para el entendimiento de esta grande historia"

Miguel de Cervantes (1547-1616)

A continuación encontrarás información fundamental para el desarrollo de tu trabajo en el curso de Cálculo Diferencial CSAI81. Es muy importante que prestes especial atención a *los objetivos del curso, los criterios de evaluación y las reglas de comportamiento.*

Objetivos

En este curso estudiarás los conceptos y métodos fundamentales del cálculo diferencial de funciones de una variable. Los **objetivos generales** son:

- Aplicar el concepto de derivada para obtener y analizar la gráfica de una función de una variable.
- Aplicar el concepto de derivada para resolver problemas de razón de cambio y optimización de interés en la ingeniería.

Horario de atención

Todos los días hábiles del trimestre, de 14:30 a 19:00 hrs., en el Aula E204.

Profesor Titular:

- Dr. Salvador Arellano Balderas: 14:30-19:00, sab.cursosuama@gmail.com

El profesor tiene plena disposición para asesorarte, así como de recibir y atender todos tus comentarios, inquietudes y dudas referentes al curso. El profesor titular *es responsable* de elaborar las guías, exámenes y demás materiales de apoyo para este curso.

Asesorías

Puedes asistir a asesoría tantas veces como quieras pero es necesario que *hayas estudiado* el material del libro de texto que se indica en la guía. Procura que tus preguntas sean concretas y bien formuladas y *¡piérdele el miedo a tu profesor!*; recuerda que está para ayudarte a resolver tus dudas. Si necesitas asesoría adicional, *pídela a tu profesor* o acude al *Centro de Matemáticas*: E201.

Guía y libro te texto

La guía del curso está basada en el libro de texto

CÁLCULO UNA VARIABLE, de G. B. Thomas, Pearson; 2010, decimosegunda edición.

Este es el texto marcado en el programa oficial del curso y lo puedes consultar en
http://cosei.azc.uam.mx/pearson.php

Es indispensable que dispongas de una copia (impresa o electrónica) de este libro y de la guía del curso.

Exámenes y tareas

Una de las actividades más importantes para que aprendas y domines los temas del curso es **hacer las tareas**. Por esta razón, un requisito indispensable para la evaluación de cada unidad es que entregues la tarea *completa, bien escrita, correctamente resuelta, bien engrapada y en limpio.*

1. Para solicitar evaluación es necesario que:
   - Tu tarea tenga el Vo. Bo. del profesor del curso.
   - Hayas aprobado todas las unidades anteriores.
   - Para realizar tu examen dispongas de TRES hojas engrapadas tamaño carta, sin flecos y que no sean de re-uso.
2. Al recibir tu examen, asegúrate de firmar el registro de exámenes y que el responsable de la sala de exámenes registre tu examen en tu expediente.
3. Al terminar tu examen, debes pasar con el profesor del curso para que te califique. Asegúrate que tu calificación quede registrada en tu expediente.
4. Puedes solicitar examen de las 14:30 a las 17:30 hrs.
5. Si entregas tu examen después de las 18:30 se te calificará hasta el dia siguiente.
6. **Copiar ó dejar copiar en los exámenes es un delito académico grave porque fomenta la corrupción y la mediocridad.** Por este motivo, si se te sorprende copiando o dejando copiar reciclarás el examen. *Si reincides recibirás NA en el curso, sin opción para concluirlo en el CSAI81.*
7. En los exámenes de este curso **no se permite usar el libro de texto ni formularios personales.** Si te hace falta, solicita a tu profesor el *Formulario de Cálculo del SAI.*

Criterios de evaluación

1. Para pasar el curso debes aprobar las diez unidades que se especifican en esta guía.
2. Las calificaciones de las unidades 1, 2, 3, 5, 6, 8 y 9 serán *cualitativas* (A de aprueba o R de recicla).
3. Las calificaciones de las unidades: 4, 7 y 10 serán *numéricas* (de 6 a 10) si apruebas o R si reciclas.
4. Para evaluar tu desempeño en el curso, tus calificaciones de las unidades 4, 7 y 10 se ponderarán de la siguiente manera:

   Unidad 4: 25 %, **Unidad 7: 35 %,** **Unidad 10: 40 %.**

Si x denota tu calificación numérica, tu **calificación final** estará dada por

$$F(x) = \begin{cases} MB, & \text{si} \quad 9 \leq x \leq 10, \\ B, & \text{si} \quad 7.5 \leq x < 9, \\ S, & \text{si} \quad 6 \leq x < 7.5. \end{cases}$$

5. Puedes mejorar tu calificación final sometiéndote a otro examen global.

6. Solamente si tienes nueve unidades aprobadas para el 10 de diciembre de 2015 recibirás la oportunidad de concluir el curso los días 11 y 14 de diciembre, o en la semana de exámenes de recuperación.

7. Si no terminas el curso en el trimestre normal, puedes aprovechar el periodo de exámenes de recuperación para avanzar algunas unidades.

8. Si no apruebas el curso en tu primera oportunidad en SAI pero cuentas con cinco unidades aprobadas, en el siguiente trimestre puedes reanudar el curso a partir de donde te quedaste, pero debes concluirlo.

9. **Importante para los oyentes:** serán considerados oyentes solamente aquellos alumnos que aprueben el examen de selección (informarse de la fecha y horario). Todos los oyentes deben aprobar el curso en el trimestre 15O.

Comportamiento

Por respeto a tu Alma Mater y al trabajo de los demás:

- No dañes el mobiliario. *El estudiante de este curso que sea sorprendido dañando el mobiliario recibirá NA en el curso, sin opción para concluirlo en el SAI, y será reportado al Coordinador del SAI.*

- En el salón de exámenes y en el área de atención del SAI, *controla tu lenguaje, modera el volumen de tu voz y apaga tu celular, iPod, iPad, iPhone, smartphone, gadget,* etc. Los profesores se reservan el derecho de suspender la asesoría o el examen a los estudiantes que violen esta norma.

Recomendaciones

"Ser consciente de la propia ignorancia es un gran paso hacia el saber."

Benjamin Disraeli (1804-1881)

1. ¡Comprométete con tu educación y asume tu papel de estudiante con responsabilidad, entusiasmo y dedicación!

2. Adquiere la disciplina de trabajar al menos dos horas diarias para este curso. Te recomendamos hacerlo en las instalaciones del SAI. *Aprende a trabajar solo y en equipo.*

3. Antes de intentar los ejercicios, estudia detenidamente en tu libro de texto los temas que se indican en la guía.

4. Esfuérzate por aprender a manipular expresiones algebraicas y a calcular correctamente con rapidez, precisión e ingenio.

5. Aprende a distinguir las ideas importantes en las soluciones de los problemas y ejercicios y a reproducirlas sin ayuda.

6. Razona detenidamente todos los problemas que se te asignan en la guía; *inténtalos muchas veces y ¡no tengas miedo a equivocarte!* Se aprende mucho de los errores; *¡lo malo es quedarse con las dudas!*

7. La mejor manera de saber si estás entendiendo un tema de matemáticas es tratando de resolver los problemas sin ayuda. Inténtalos y si tienes dificultades, discútelas con tus compañeros o *¡ven al SAI para que te demos asesoría!* También puedes pedir asesoría en el Centro de Matemáticas.

8. Es muy importante para tu formación profesional que adquieras el hábito de reportar tu trabajo bien presentado; *escrito en forma clara, concisa y ordenada, con tus propias palabras, con buena ortografía y utilizando correctamente la notación matemática, con diagramas y gráficas bien hechas.*

9. Adquiere el hábito de criticar y mejorar permanentemente tu trabajo.

10. Aprende a usar el formulario, tu calculadora, Maple, SAGE, Matlab o Mathematica *(Maple 5 y SAGE son software libre; Mathematica está disponible en el Edif. T y en las computadoras del SAI).*

Cálculo Diferencial

"Il libro della natura é scritto in lingua matematica."

Galileo Galilei (1564-1642)

"El gran libro de la naturaleza permanece siempre abierto ante nuestros ojos y en sus páginas se encuentra la verdadera filosofía ... Pero no nos es posible leerlo a menos que conozcamos los caracteres y el lenguaje en el que está escrito ... Está escrito en lenguaje matemático y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas."

Galileo Galilei (1564-1642)

"A esa lista de caracteres, hoy en día le agregaríamos las derivadas y las integrales."

Peter Lax (1926-)

Unidad 1

Reglas de derivación

Objetivo

Aplicar las *reglas de derivación* de potencias, sumas, productos, cocientes y de funciones trigonométricas en el cálculo de derivadas.

Contenido

1. Reglas de derivación: potencias, sumas, productos y cocientes.
2. Derivadas de orden superior.
3. Derivadas de funciones trigonométricas.
4. Aplicación de derivadas para estudiar situaciones en contextos reales.

Indicadores de evaluación

1. Usar las reglas de derivación de potencias, sumas, productos y cocientes para calcular derivadas de primer orden.
2. Calcular derivadas de funciones trigonométricas.
3. Calcular derivadas de orden superior.
4. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
5. Identificar gráfica y algebraicamente los intervalos de derivabilidad de una función.
6. Dada la posición de un objeto que se mueve en línea recta, determinar su velocidad y aceleración en cada instante.

Actividades

1. Estudia las secciones 3.3 y 3.5 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar poco a poco el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 1, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 1.

Tarea de la unidad 1

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad y = 2x^5 - x^2 + 1, \qquad \text{(b)} \quad y = 7x^{-5/3} - 2\sqrt[5]{x}, \qquad \text{(c)} \quad y = 3\sqrt[3]{x^2} - \frac{3}{x^{2/3}}.$$

2. Calcula las derivadas de las siguientes funciones usando reglas de derivación:

$$\text{(a)} \quad y = \sqrt[5]{x}\,(x^3 - 5\sqrt[3]{x}), \quad \text{(b)} \quad y = x^{2/3}\operatorname{sen} x, \quad \text{(c)} \quad y = \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right).$$

3. Calcula la primera y la segunda derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad y = x^3 - x^2, \qquad \text{(b)} \quad y = \frac{t+1}{t-1}, \qquad \text{(c)} \quad y = \frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

4. Encuentra la ecuación de las rectas tangente y normal a cada una de las gráficas de las siguientes funciones en los puntos dados:

$$\text{(a) } y = 2x - x^2, \quad (1,1); \qquad \text{(b) } y = \sqrt{x}, \quad (4,2).$$

   Esboza la gráfica de cada una de estas funciones, conjuntamente con las rectas tangente y normal en los puntos dados.

5. Calcula la primera y la segunda derivada de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad y = \cos\theta - 5\operatorname{sen}\theta, \qquad \text{(b)} \quad y = \sqrt{x}\tan x; \qquad \text{(c)} \quad y = \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen} t}.$$

6. Calcula la primera, la segunda y la tercera derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad y = x^3 - 5x^2 + 3x - 1, \qquad \text{(b)} \quad y = x^2\operatorname{sen} x; \qquad \text{(c)} \quad y = \frac{\tan\theta}{\sec\theta - 1}.$$

7. Utiliza las reglas de derivación para decidir, sin calcular las derivadas, en qué intervalos son derivables las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad y = \frac{5}{x} - \sqrt{4-x}, \qquad \text{(b)} \quad y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{9-x^2}; \qquad \text{(c)} \quad y = \frac{\sqrt{\cos t}}{\operatorname{sen} t}.$$

8. Encuentra la ecuación de las rectas tangente y normal a cada una de las gráficas de las siguientes funciones en los puntos dados:

$$y = 4\operatorname{sen} x, \quad (\pi/4, 2\sqrt{2}); \qquad y = 3\tan x, \quad (\pi/4, 3).$$

   Esboza la gráfica de cada una de estas funciones, conjuntamente con las rectas tangente y normal en los puntos dados.

9. Esboza la gráfica de $y = \cos x \operatorname{sen} x$ y determina gráfica y analíticamente los puntos en los que la tangente a la gráfica es horizontal.

10. Si la posición de una partícula en el eje y está dada por $y = 5\operatorname{sen} t\cos t$, encuentra:
    - Su posición, velocidad y aceleración en los instantes $t = 0$, $t = \pi/4$ y $t = \pi$.
    - Los instantes en los que la velocidad vale cero.
    - Los instantes en los que la aceleración es nula.

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.3: 1, 4, 7,..., 28, 29, 32, 33, 36, 39, 40, 43, 45 y 46.
- Sección 3.5: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31, 34, 35, 38, 47, 48, 53 y 54.

Unidad 2

La regla de la cadena y derivadas implícitas

Objetivo

Usar la *regla de la cadena* para calcular derivadas de funciones explícitas e implícitas.

Contenido

1. La regla de la cadena.
2. Diferenciación de funciones implícitas.

Indicadores de evaluación

1. Usar la regla de la cadena para calcular derivadas.
2. Calcular derivadas de funciones implícitas.
3. Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal en un punto dado de una curva definida implícitamente.

Actividades

1. Estudia las secciones 3.6 y 3.7 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.
2. Resuelve y entrega la tarea de la unidad 2, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.
3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 2.

Tarea de la unidad 2

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Usa la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = (1+2x-x^3)^7, \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt[5]{r^2-\sqrt{r}}.$$
2. Emplea la regla de la cadena para calcular las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = \left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{1+\cos\theta}\right)^4, \qquad \text{(b)}\quad y = \cos\left(t^2+\frac{2}{t}\right).$$
3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = 3x^2\sqrt[4]{2-x^3}, \qquad \text{(b)}\quad y = \pi x\operatorname{sen}(3x^2).$$
4. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = (1-\theta^2)^3\sqrt{2\theta^3+1}, \qquad \text{(b)}\quad y = \frac{5\operatorname{sen}\theta^2}{1+\cos\sqrt{\theta}}.$$
5. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$\text{(a)}\quad y = \left(\frac{1-\sqrt{\theta}}{\operatorname{sen}(\theta^2)}\right)^2, \qquad \text{(b)}\quad y = \sqrt[3]{\theta+\operatorname{sen}^2(\sqrt{\theta})}.$$
6. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
$$y = \pi\operatorname{sen}^2(\sec(5t^3)) - 4\tan^2\left(\cos\left(\sqrt[3]{5t^2+1}\right)\right).$$
7. Utiliza derivación implícita para calcular y' si
$$\text{(a)}\quad x^3+y^2 = 2xy, \qquad \text{(b)}\quad \sqrt{x+y} = xy.$$
8. Utiliza derivación implícita para calcular y' si
$$\text{(a)}\quad x^{2/3}+y^{2/3} = \cos(xy), \qquad \text{(b)}\quad xy^2 = \frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\cos(x+y)}.$$
9. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos dados:
$$\text{(a) } y^4 = y^2-x^2,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{1}{2}\right); \qquad \text{(b) } y^2(2-x) = x^3,\ (1,1).$$
10. La posición $y(t)$ de una partícula está dada implícitamente por $t^2(t-y)^2 = t^2-y^2$. Encuentra su velocidad en $t=1$ si se sabe que $y(1)=1$.

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.6: 1, 4, 7,..., 76.
- Sección 3.7: 2, 5, 8, 11,..., 44.

Unidad 3

Tasas relacionadas, linealización y valores extremos

Objetivo

Aplicar la derivada para resolver problemas de *tasas relacionadas*, *aproximaciones lineales* y *valores extremos.*

Contenido

1. Problemas de tasas relacionadas.
2. Linealización y diferenciales.
3. Puntos críticos y valores extremos locales y absolutos de una función.

Indicadores de evaluación

1. Usar la derivada para resolver problemas de tasas relacionadas.
2. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.
3. Usar la aproximación lineal estándar para estimar funciones en contextos reales.
4. Utilizar la notación de Leibniz para calcular derivadas.
5. Utilizar la aproximación diferencial para estimar el cambio de una función derivable alrededor de un punto dado.
6. Determinar gráficamente los valores máximo y mínimo locales (relativos) de una función.
7. Determinar gráficamente los valores máximo y mínimo absolutos de una función continua en un intervalo.
8. Determinar los puntos críticos de una función.
9. Determinar gráfica y analíticamente los valores máximo y mínimo absolutos de una función en un intervalo cerrado finito dado.

Actividades

1. Estudia las secciones 3.8, 3.9 y 4.1 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar poco a poco el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 3, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 3.

Tarea de la unidad 3

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Dos personas parten del mismo punto, una hacia el oeste a 30 km/hr y la otra hacia el sur a 20 km/hr. ¿Con qué rapidez cambia la distancia entre ambas después de 3 minutos?

2. Una niña vuela un cometa a 80 m de altura. Si el viento aleja horizontalmente el cometa a 10 m/seg, ¿qué tan rápido debe soltar la cuerda cuando el cometa se encuentra a 100 m de ella?

3. Determina la linealización de $f(x)$ en los puntos dados.

   (a) $f(x) = x^2 - x, \quad a = 2;$ (b) $f(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = \dfrac{\pi}{3}.$

   Enseguida, esboza las gráficas de estas funciones con sus correspondientes linealizaciones en los puntos dados.

4. Utiliza aproximaciones lineales para obtener, sin calculadora, un valor aproximado de

   (a) $\sqrt{17};$ (b) $(28)^{2/3};$ (c) $\tan(70°).$

   ¿En cuántos decimales coinciden las aproximaciones con los resultados que se obtienen directamente de tu calculadora?

5. Una carretera recta cruza perpendicularmente un río, también recto, a través de un puente de 100 m de altura. Un barco que se encuentra a 5 km se acerca al puente a 20 km/h y un automóvil que se encuentra a 30 km se acerca al puente a 90 km/h. Determine

   a) La distancia entre el barco y el automóvil cinco minutos antes de que el barco pase debajo del puente.
   b) El instante en el que la distancia entre el barco y el automóvil es la menor posible.
   c) La velocidad con la que se acercan el barco y el automóvil cuando el automóvil pasa sobre el río.

6. Utiliza la notación de Leibniz para calcular las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $y = x(1+x)^{1/2};$ (b) $y = x \operatorname{sen} 5x;$ (c) $y = \tan(x - \sqrt{x}).$

7. Utiliza linealización para estimar el cambio $\Delta A = A(2 + \Delta r) - A(2)$ en el área $A = \pi r^2 + \pi r\sqrt{r^2+4}$ de un cono circular recto de radio r y altura 2, cuando el radio pasa de 2 a $2 + \Delta r$.

8. Encuentra los puntos críticos y determina los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones:

   (a) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$; (b) $y = \cos 3x$. (b) $y = \dfrac{1}{x^2-2x+1}$.

   Usa esta información para esbozar las gráficas.

9. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones e indica los puntos en donde se alcanzan:

   $y = x^2 - 3x + 1,\ -2 \leq x \leq 7;\quad y = x - 2\cos x,\ 0 \leq x \leq 2\pi;\quad y = (x-2)^{2/3},\ -2 \leq x \leq 5.$

   Usa esta información para esbozar las gráficas.

10. La altura de un cuerpo que se mueve verticalmente está dada por $h = -5t^2 + 4t + 3$, con h en metros y t en segundos. Encuentra la altura máxima de ese cuerpo.

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 3.8: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 y 32.
- Sección 3.9: 1, 3, 4, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 20, 23, 26, 29 y 32.
- Sección 4.1: 3, 6, ..., 63.

Unidad 4

Primer examen integrador

Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras tres unidades del curso.

Contenido

El contenido de esta unidad es el de las tres unidades anteriores.

Indicadores de evaluación

1. Aplicar las reglas básicas de derivación: *potencias, sumas, productos, cocientes, funciones trigonométricas, regla de la cadena y funciones implícitas,* para calcular derivadas de primer orden y de orden superior.
2. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
3. Identificar gráfica y algebraicamente los intervalos de derivabilidad de una función.
4. Dada la posición de un objeto que se mueve en línea recta, determinar su velocidad y aceleración instantáneas.
5. Usar la derivada para resolver problemas de tasas relacionadas.
6. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.
7. Utilizar la notación de Leibniz para calcular derivadas.
8. Estimar el cambio de una función derivable alrededor de un punto dado, utilizando la aproximación diferencial.
9. Determinar los puntos críticos de una función.
10. Determinar gráfica y analíticamente los valores máximo y mínimo absolutos de una función en un intervalo cerrado finito dado.

Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Recuerda que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 25 % de tu calificación final.*

2. Para presentar tu primer examen integrador debes entregar un ensayo en el que enuncies las leyes del movimiento de Newton y expliques porqué son importantes las derivadas en la formulación matemática de las dos primeras. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *No olvides que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 4.

4. **Si reciclas dos veces tu primer examen integrador, para presentarlo por tercera vez es indispensable que entregues la siguiente tarea correctamente resuelta.**

Tarea de la unidad 4

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Mientras Jorge camina por un sendero recto a 2 m/seg lo enfoca un reflector que se encuentra en el piso, a 10 m del sendero. ¿Con qué rapidez gira el reflector 5 segundos después de que Jorge pasó por el punto más cercano al reflector?

2. Calcula la primera y la segunda derivadas de las siguientes funciones:

$$\text{(a)}\quad y=(x^3-5x^2+3x-1)^2, \qquad \text{(b)}\quad y=x^2\operatorname{sen}^2 x; \qquad \text{(c)}\quad y=\frac{\tan\theta^2}{\sec\theta^2-1}.$$

3. Esboza la gráfica de $y=\operatorname{sen}x+\cos x$ y determina gráfica y analíticamente los puntos en los que la tangente a la gráfica es horizontal.

4. Encuentra la ecuación de las rectas tangente y normal a cada una de las gráficas de las siguientes funciones en los puntos dados:

$$y=\sqrt{3x^2+1},\quad (1,2); \qquad\qquad y=\frac{x+1}{x^2+2x+2},\quad (0,1/2).$$

   Esboza la gráfica de cada una de estas funciones, conjuntamente con las rectas tangente y normal en los puntos dados.

5. Si la posición de una partícula en el eje y está dada por $y=\operatorname{sen}t+\cos t$, encuentra:
   - Su posición, velocidad y aceleración en los instantes $t=0$, $t=\pi/4$ y $t=\pi$.
   - Los instantes en los que la velocidad vale cero.
   - Los instantes en los que la aceleración es nula.

6. Utiliza derivación implícita para calcular y' si

$$\text{(a)}\quad x^3+xy^2=y/x, \qquad\qquad \text{(b)}\quad \sqrt{x-y}=x^2y.$$

7. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal a las siguientes curvas en los puntos dados:

$$\text{(a) } y^3 + xy^2 - x^2y = 1,\ (1,1); \qquad \text{(b) } \operatorname{sen} y + x\cos y = 3y,\ (0,0).$$

8. La posición $y(t)$ de una partícula está dada implícitamente por $2 + (t-y)^2 = t^2 - y^2$. Encuentra su velocidad en $t = 2$ si se sabe que $y(2) = 1$.

9. Utiliza aproximaciones lineales para obtener, sin calculadora, un valor aproximado de

$$\text{(a)} \quad \sqrt{66}; \qquad \text{(b)} \quad (9)^{2/3}.$$

¿En cuántos decimales coinciden las aproximaciones con los resultados que se obtienen directamente de tu calculadora?

10. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de las siguientes funciones e indica los puntos en donde se alcanzan:

$$y = x^4 - 2x^3,\ -2 \le x \le 7; \quad y = \sqrt{3}x + 2\operatorname{sen} x \ \ -4 \le x \le 3.$$

Usa esta información para esbozar las gráficas.

Unidad 5

Monotonía, concavidad y trazado de gráficas

Objetivo

Dada una función, determinar su dominio, sus ceros, sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad y usar esta información para esbozar su gráfica.

Contenido

1. El teorema del valor medio.
2. Funciones crecientes y funciones decrecientes.
3. Criterio de la primera derivada para extremos locales.
4. Puntos de inflexión.
5. Concavidad y trazado de gráficas.
6. Criterio de la segunda derivada para extremos locales.

Indicadores de evaluación

1. Usar el teorema del valor medio para argumentar porqué la diferencia de dos funciones que tienen la misma derivada en un intervalo debe ser una constante.
2. Utilizar el teorema del valor medio para acotar el número de ceros de una función monótona.
3. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la primera derivada para clasificarlos.
4. Determinar los intervalos de monotonía de una función, mediante el signo de su primera derivada.
5. Determinar los valores máximos y mínimos locales y absolutos de una función en un intervalo dado.
6. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la segunda derivada para clasificarlos.

7. Determinar los puntos de inflexión de una función mediante el cambio de signo de la segunda derivada.

8. Determinar los intervalos de concavidad de una función, mediante el signo de su segunda derivada.

9. Dada una función, determinar su dominio, sus ceros, sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, sus intervalos de positividad, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad, sus asíntotas horizontales y verticales y usar esta información para esbozar su gráfica.

Actividades

1. Estudia las secciones 4.2, 4.3 y 4.4 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 5, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 5.

Tarea de la unidad 5

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Usa derivadas para verificar que, dos a dos, las siguientes funciones difieren únicamente por una constante:

   (a) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, (b) $g(x) = -\dfrac{1}{2}\cos(2x)$, (c) $h(x) = -\cos^2 x$.

2. Determina el número de raíces que tiene cada una de las siguientes ecuaciones en los intervalos dados:

   (a) $2x^3 + 3x^2 - 12x + 6 = 0, \quad -2 \leq x \leq 2$; (b) $x + \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{3}\right) = 8, \quad x \in \mathbb{R}$.

3. Determina la posición $s(t)$ de un cuerpo que se desplaza en línea recta, cuya velocidad $v = ds/dt$ y posición inicial $s(0)$ están dadas como sigue:

   (a) $v = 3t + 1,\ s(0) = 1$; (b) $v = 4t - 5\operatorname{sen}(2t),\ s(0) = 3$.

4. Un tanque en forma de cono invertido de 2 m de radio y 3 m de altura está lleno de agua. Demuestra que si el agua se desaloja a 40 litros por segundo, entonces t segundos después de iniciar el vaciado, la altura $h(t)$ del nivel del agua está dada (en metros) por

$$h(t) = 3\left(1 - \frac{t}{100\pi}\right)^{1/3}.$$

5. Encuentra los intervalos de monotonía y determina y clasifica los puntos críticos de f si:

   (a) $f'(x) = x(x-2)$; (b) $f'(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$; (c) $f'(x) = x^2 - 2x + 1$.

6. Encuentra los puntos críticos de las siguientes funciones y usa el criterio de la primera derivada (o el de la segunda derivada) para clasificarlos:

$$\text{(a) } f(x) = x^3 - 4x; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{x+2}{x^2+4x+5}.$$

7. Encuentra el valor mínimo de la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

en el intervalo $(0, \infty)$.

8. Encuentra los intervalos de concavidad y determina los puntos de inflexión de f si:

(a) $f''(x) = x(x-2)$; (b) $f''(x) = (x-1)(x-2)(x+1)$; (c) $f''(x) = 4x^2 + 4x + 1$.

9. Determina el dominio, el rango, los intervalos de monotonía, los puntos críticos, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(x) = x^4 - 3x^2; \qquad \text{(b) } f(x) = \frac{4x}{4x^2+1}.$$

Utiliza esta información para esbozar las gráficas.

10. Encuentra los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = x^4$; (b) $f(x) = x|x|$; (c) $f(x) = 2 - (x-2)^{1/3}$.

11. Dada la función $y = x^2\sqrt{1-x^2}$:

a) Encuentra su dominio.

b) Determina su paridad.

c) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.

d) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.

e) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.

f) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.

g) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 4.2: 2, 5, 8, 11, 14, 19, 21, 23, 26, 31, 34, 38, 41, 44, 50 y 52.
- Sección 4.3: 3, 6, 9,..., 51.
- Sección 4.4: 2, 5, 8,..., 83.

Unidad 6

Optimización aplicada

Objetivo

Utilizar derivadas para *resolver problemas aplicados de máximos y mínimos.*

Contenido

1. Problemas de optimización aplicada.

Indicadores de evaluación

1. Utilizar la derivada para resolver problemas de optimización.

Actividades

1. Estudia la sección 4.5 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 6, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Procura aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 6.

Tarea de la unidad 6

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentra la mínima distancia del punto $(-2, 1)$ a la recta $x + y = 2$.

2. Se tienen 100 m de cerca para construir un corral rectangular con tres divisiones paralelas a uno de sus lados. ¿Cuánto debe valer el largo y el ancho del corral para que su área sea máxima?

3. Determina las dimensiones que debe tener una lata cilíndrica, con tapa, de 1 dm^3 de volumen, que utilice la menor cantidad de aluminio para su construcción.

4. Se desea minimizar un cartel rectangular cuya área de impresión es de 300 cm^2, con márgenes superior e inferior de 10 cm y márgenes laterales de 6 cm cada uno. Encuentra las dimensiones que debe tener el cartel que use la menor cantidad de papel.

5. Encuentra las dimensiones del cilindro de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera de 1 m de radio.

6. Encuentra las dimensiones del cono de menor volumen que circunscribe a un cilindro de radio 5 y altura 9. Se supone que las bases del cono y del cilindro son coplanares y tienen el mismo centro.

7. Se quiere diseñar un recipiente cilíndrico con tapa de 1 litro de volumen. Si el m^3 de material para la tapa y la base cuesta el doble que el de los lados, ¿cuáles son el radio y la altura del recipiente más económico?

8. Se desea construir un cometa pegando las bases de dos triángulos isósceles, cada uno de base $2x$. Si los lados restantes del primer triángulo deben medir 30 cm y los del segundo de 40, ¿cuánto debe valer x para que el área del cometa sea máxima.

9. Se quiere diseñar una caja rectangular de base cuadrada de 1 m^3 de volumen. Si el m^2 de material para la tapa vale 20 pesos, el de la base 50 y el de los lados 30, determina las dimensiones de la caja más económica.

10. Juan se encuentra en un punto A de la orilla de un lago circular de 1 km de radio y desea ir al punto B, opuesto a A en el otro lado del lago. Si Juan dispone de un bote que navega a 3 km/h y camina a razón de 4 km/h. Determina el tiempo que Juan debe caminar para llegar a B en el menor tiempo posible.

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 4.5: 2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 14, 20 y 22.

Unidad 7

Segundo examen integrador

Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar los temas, conceptos y métodos estudiados en las primeras seis unidades del curso.

Contenido

El contenido de esta unidad es el de las seis unidades anteriores.

Indicadores de evaluación

1. Utilizar el teorema del valor medio para acotar el número de ceros de una función monótona.
2. Usar el teorema del valor medio para argumentar porqué la diferencia de dos funciones que tienen la misma derivada en un intervalo debe ser una constante.
3. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la primera derivada para clasificarlos.
4. Encontrar los puntos críticos de una función y usar el criterio de la segunda derivada para clasificarlos.
5. Determinar los intervalos de monotonía de una función, mediante el signo de su primera derivada.
6. Determinar los intervalos de concavidad de una función, mediante el signo de su segunda derivada.
7. Determinar los valores máximo y mínimo absolutos de una función en un intervalo finito dado.
8. Determinar los valores máximos y mínimos locales y absolutos de una función en un intervalo dado.
9. Dada una función, determinar su dominio, sus ceros, sus puntos críticos, sus puntos de inflexión, sus intervalos de positividad, sus intervalos de monotonía, sus intervalos de concavidad, sus asíntotas horizontales y verticales y usar esta información para esbozar su gráfica.
10. Aplicar la derivada para resolver problemas de optimización.

Actividades y tarea

1. Revisa el material de las seis unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *Ten en cuenta que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 35 % de tu calificación final.*

2. Para presentar el examen de esta unidad debes entregar un ensayo acerca del método de Pierre Fermat (1601-1665) para localizar los máximos y mínimos locales de una función. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 7.

4. **Si reciclas dos veces tu segundo examen integrador, para presentarlo por tercera vez debes entregar la siguiente tarea correctamente resuelta.**

Tarea de la unidad 7

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Encuentre todas las rectas que son tangentes simultáneamente a las parábolas
$$y = -x^2 \qquad \text{y} \qquad y = x^2 + 1.$$

2. En un despeje de portería, una pelota sale disparada con una velocidad inicial $\mathbf{v} = (v_0, v_1)$. ¿Qué relación debe haber entre v_0 y v_1 para que el área debajo de la parábola seguida por la pelota sea la mayor posible? *Nota.* El área debajo del arco de la parábola es 2/3 del área del rectángulo que la circunscribe.

3. Determina los máximos y mínimos locales, los intervalos de monotonía, los puntos de inflexión, los intervalos de concavidad y esboza la gráfica de $y = f(x)$ si se sabe que $f(0) = 2$ y
$$y' = -(x-2)(x+3).$$

4. Calcula y' para cada una de las siguientes funciones:
$$\text{(a) } y = \sqrt[4]{x^2 + x\cos^2 x}, \qquad \text{(b) } y = \frac{x^2 - \tan(3x)}{\sqrt{x^2 - 2x}}, \qquad \text{(b) } \operatorname{sen}(x/y) + \cos(y/x) = yx.$$

5. Determina el dominio, el rango, los intervalos de monotonía, los puntos críticos, los máximos y mínimos locales, los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:
$$\text{(a) } f(x) = x^4 - 4x^3; \qquad \text{(b) } f(x) = x\sqrt{4 - x^2}.$$
Utiliza esta información para esbozar las gráficas.

6. Dada la función $y = \dfrac{x-1}{x^2 - 2x + 2}$:

a) Encuentra su dominio.

b) Determina su paridad.

c) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.

d) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.

e) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.

f) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.

g) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

7. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de $y = \cos\theta + \dfrac{\theta}{2}$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

8. Determine el punto de la parábola $y = (x-1)^2$ que está más cerca del origen.

9. Una ventana tiene la forma de un rectángulo rematada en su parte superior por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 4 m, encuentre las dimensiones de la ventana de mayor área.

10. La esquina superior izquierda de una hoja de papel rectangular, de 20 cm de ancho por 30 de largo, se dobla hasta hacerla llegar al borde derecho, como en la Figura 7.1. ¿Para qué valor de x el pentágono $ABCDE$ tendrá área máxima? *Sugerencia:* Note que el pentágono tiene área $\mathcal{A} = 600 - \dfrac{xy}{2}$. Enseguida establezca la relación

$$y = \sqrt{x^2 - (20-x)^2} + \sqrt{y^2 - 400}.$$

Luego despeje y de esta expresión y obtenga

$$y = \frac{\sqrt{20}x}{\sqrt{2x-20}}.$$

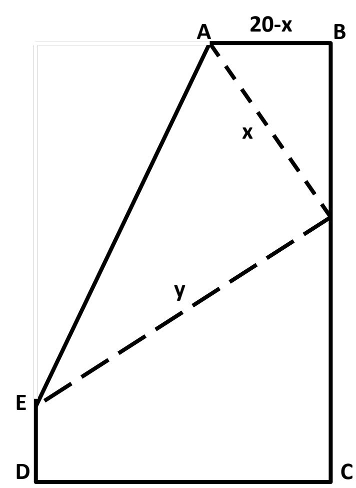

Figura 7.1: Esquina superior doblada

Unidad 8

Funciones logarítmicas y exponenciales

Objetivo

Usar los métodos del cálculo diferencial para obtener y analizar las gráficas de las funciones *exponencial* y *logaritmo natural*.

Contenido

1. Funciones inversas y sus derivadas.
2. Logaritmos naturales.
3. Derivadas logarítmicas.
4. La función exponencial.

Indicadores de evaluación

1. Esbozar la gráfica de una función invertible a partir de la gráfica de su inversa.
2. Decidir gráfica y algebraicamente si una función es inyectiva y encontrar su inversa.
3. Determinar gráfica y algebraicamente el dominio y el rango de una función y de su inversa.
4. Obtener la derivada de una función invertible a partir de la derivada de su inversa.
5. Definir las funciones logaritmo natural y exponencial y establecer sus propiedades fundamentales.
6. Calcular derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas.
7. Utilizar las propiedades básicas de las funciones exponenciales y logarítmicas para simplificar expresiones o resolver ecuaciones que involucren este tipo de funciones.
8. Utilizar el método de diferenciación logarítmica para calcular derivadas.
9. Dada una función exponencial o logarítmica, determinar su dominio, sus ceros, sus intervalos de positividad, sus asíntotas, sus intervalos de monotonía, sus extremos locales, sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y usar esta información para esbozar su gráfica.

Actividades

1. Estudia las secciones 7.1, 7.2 y 7.3 de la Decimosegunda edición del Thomas y resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 8, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 8.

Tarea de la unidad 8

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. A partir de las gráficas de las siguientes funciones, esboza las gráficas de las correspondientes funciones inversas:

   (a) $f(x) = 2 - x^2$, $x \geq 0$; (b) $f(x) = x^2 - 2x - 1$, $x \leq 1$.

2. Decide si las siguientes funciones son inyectivas y en caso afirmativo encuentra su inversa:

   (a) $f(x) = x^2 - 2x$, $x \leq 2$; (b) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3}$, $x \neq 3$.

3. Determina gráfica y algebraicamente los dominios y rangos de las siguientes funciones y los de sus correspondientes inversas:

   (a) $f(x) = \sqrt{2-x}$, $x \leq 2$; (b) $f(x) = 4x - x^2$, $x \leq 2$.

4. Si $f(x) = x^3 + 5x + 1$, encuentra $\left(f^{-1}\right)'(-5)$. Nota que $f(-1) = -5$.

5. Utiliza las propiedades de los logaritmos para simplificar:

   (a) $\ln(8/2^5)$; (b) $3^{\log_3 5}$; (c) $\ln(2^{2/5}\sqrt{2})$.

6. Encuentra las derivadas de las siguientes funciones:

   (a) $y = x^2 \ln x$; (b) $y = x^3 e^x + \ln(e^x \ln x)$; (c) $y = \dfrac{1+e^x}{1-e^{-x}}$.

7. Encuentra y' y y'' para cada una de las siguientes funciones:

   (a) $y = e^{-x^2}$; (b) $y = x^3 e^{\operatorname{sen} x}$; (c) $y = e^{x \ln x} \cos(\ln x)$.

8. Simplifica las siguientes expresiones:

   $\ln(y^3) - 2\ln y$; $\ln(x^x e^{2\ln x})$; $e^{\ln(x+1)^2 - 2\ln x}$.

9. Utiliza diferenciación logarítmica para derivar las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = \left(\frac{t}{t^2+1}\right)^5; \qquad \text{(b) } y = \sqrt{\frac{x\ln(x+1)e^{(x+2)}}{x^2+1}}; \qquad \text{(c) } y = x^x e^{x\cos x}.$$

10. Encuentra y' para cada una de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = x^{-x^2}; \qquad \text{(b) } y = x^{\operatorname{sen} x}; \qquad \text{(c) } y = (\ln x)^{\ln x}.$$

11. Para cada una de las funciones

$$\text{(a)} \quad y = x^2 e^{-2x}, \qquad\qquad \text{(b)} \quad y = x\ln(x^2),$$

determina su dominio, sus ceros, sus intervalos de positividad, sus asíntotas, sus intervalos de monotonía, sus extremos locales, sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad y usa esa información para esbozar su gráfica.

12. Resuelve para x en las siguientes ecuaciones:

$$\ln(x+1) + \ln x = 4; \qquad 2x\ln x + x = 0; \qquad e^x - e^{-x} + 1 = 0.$$

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 7.1: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 19, 23, 25, 31, 32 50, 53 y 54.
- Sección 7.2: 1, 3, 5, 11, 17, 23, 29, 55, 59, 63 y 67.
- Sección 7.3: 1, 3, 5, 9, 11, 13, 19, 53, 57, 61, 71, 82, 111, 114 y 115.

Unidad 9

Trigonométricas inversas. Regla de L'Hôpital y polinomios de Taylor

Objetivo

Obtener y analizar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas, calcular límites de formas indeterminadas y aplicar el concepto de aproximación de una función mediante polinomios de Taylor.

Contenido

1. Funciones trigonométricas inversas.
2. Formas indeterminadas y la regla de L'Hôpital.
3. El Teorema de Taylor.

Indicadores de evaluación

1. Utilizar triángulos o el círculo trigonométrico para calcular valores importantes de las funciones trigonométricas inversas.
2. Calcular derivadas de funciones trigonométricas inversas.
3. Utilizar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas inversas para simplificar expresiones que involucren este tipo de funciones.
4. Utilizar las propiedades básicas de las funciones trigonométricas inversas para resolver ecuaciones que involucren este tipo de funciones.
5. Esbozar las gráficas de las funciones trigonométricas inversas.
6. Utilizar la regla de L'Hôpital para calcular límites de formas indeterminadas.
7. Encontrar e interpretar gráficamente la aproximación de los polinomios de Taylor de grados uno y dos (aproximación lineal y cuadrática) de una función en un punto dado.
8. Encontrar el polinomio de Taylor de grado n de una función en un punto dado.
9. Utilizar polinomios de Taylor para obtener aproximaciones de los valores de una función alrededor de un punto dado.

Actividades

1. Estudia la secciones 7.5, 7.6 y la parte de polinomios de Taylor de la Sección 10.8 de la Decimosegunda edición del Thomas y el material sobre polinomios de Taylor que se te entregará en el SAI. Resuelve ejercicios diversos que cubran todos los indicadores de evaluación de esta unidad. Te sugerimos iniciar con ejercicios sencillos y aumentar paulatinamente el grado de dificultad hasta alcanzar el nivel de los ejercicios de la tarea.

2. Entrega la tarea de la unidad 9, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Te sugerimos aprobar esta unidad antes de finalizar la semana 9.

Tarea de la unidad 9

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Por medio de un triángulo calcula:

$$\text{(a) } \operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right); \qquad \text{(b) } \tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right).$$

2. Encuentra y' en cada una de las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a) } y = \operatorname{arc}\cos(x^2) - 5\ln(\operatorname{sen}^{-1} x); \qquad \text{(b) } y = 2x^3 \ln(\arctan x^2);$$

3. Simplifica

$$\text{(a) } \operatorname{sen}\left(\arctan(x/2)\right); \qquad \text{(b) } \tan\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)\right).$$

4. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$2 + 3\operatorname{sen} x = 1 + \operatorname{sen} x; \qquad e^{2\tan x} = 1 + e^{\tan x}.$$

5. Esboza las gráficas de las siguientes funciones:

$$y = -2\operatorname{arc}\cos(x/3); \qquad y = 2 - \arctan(2x).$$

6. Utiliza la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites:

$$\text{(a) } \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}; \qquad \text{(b) } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}; \qquad \text{(c) } \lim_{t\to 0} \frac{t - \operatorname{sen} t}{t^3}.$$

7. Usa la regla de L'Hôpital para encontrar los siguientes límites:

$$\text{(a) } \lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}}{e^x}; \qquad \text{(b) } \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}; \qquad \text{(c) } \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^9}; \qquad \text{(d) } \lim_{t\to\infty} \frac{t^2 \ln t}{e^t}.$$

Sugerencia. En el inciso c) has el cambio de variables $t = 1/x^2$.

8. Encuentra la linealización de $f(x)$ en los puntos dados:

$$\text{(a) } f(x) = x^2 - 4x, \quad x = 1; \qquad \text{(b) } f(x) = \tan x, \quad x = \frac{\pi}{4}.$$

Enseguida esboza la gráfica de cada una de las funciones dadas, conjuntamente con las correspondientes linealizaciones en el punto dado.

9. Encuentra el polinomio de Taylor de grado 3 en $a = 0$ de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad f(x) = (1+x)^3; \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}; \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \arctan(2x).$$

10. Encuentra el polinomio de Taylor de grado n en $a = 0$ de las siguientes funciones y estime el error si $n = 5$ y $x = 1/2$:

$$\text{(a)} \quad f(x) = \operatorname{sen} x; \qquad \text{(b)} \quad f(x) = e^x; \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

11. Usa los resultados del ejercicio anterior para encontrar el polinomio de Taylor de grado n en $a = 1$ de las siguientes funciones:

$$\text{(a)} \quad f(x) = e^{x+2}; \qquad \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{4-x}; \qquad \text{(c)} \quad f(x) = \operatorname{sen}(2-2x).$$

12. Utiliza aproximaciones de Taylor de grado 3 para obtener, sin calculadora, un valor aproximado de

$$\text{(a)} \quad \sqrt{17}; \qquad \text{(b)} \quad (28)^{2/3}; \qquad \text{(c)} \quad \tan(63^\circ).$$

¿En cuántos decimales coinciden las aproximaciones con los resultados que se obtienen directamente de tu calculadora?

Ejercicios complementarios

Si necesitas práctica adicional, te sugerimos elegir en tu libro de texto algunos de los ejercicios que te proponemos a continuación:

- Sección 7.5: 1, 6, 11, 16, 21,..., 66, 67 y 74.
- Sección 7.6: 3, 6, 9, 12, ..., 42.
- Sección 10.8: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Unidad 10

Evaluación global

Objetivo

Reafirmar, unificar e integrar todos los temas, conceptos y métodos estudiados en el curso.

Contenido

Todos los temas del curso.

Indicadores de evaluación

1. Calcular derivadas de funciones definidas por *sumas, productos, cocientes, potencias y composiciones,* así como de *funciones implícitas.*
2. Calcular derivadas de *funciones trascendentes y sus inversas.*
3. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de una función en uno de sus puntos.
4. Determinar los intervalos de derivabilidad de una función.
5. Dada la posición de un objeto que se mueve en línea recta, determinar su velocidad y aceleración instantáneas.
6. Resolver problemas de tasas relacionadas.
7. Encontrar los puntos críticos y determinar los valores extremos absolutos de una función en un intervalo cerrado finito.
8. Utilizar la derivada para resolver problemas de optimización aplicada.
9. Decidir si una función es inyectiva y encontrar su inversa, así como el dominio, el rango, la derivada y la gráfica de la inversa.
10. Simplificar expresiones que involucren funciones trascendentes y sus inversas.
11. Resolver ecuaciones que involucren funciones trascendentes y sus inversas.
12. Usar la regla de L' Hôpital para calcular límites de formas indeterminadas.
13. Determinar el dominio, los ceros, los intervalos de positividad, las asíntotas, los intervalos de monotonía, los extremos locales, los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad de una función dada (algebraica o trascendente) y usar esa información para esbozar su gráfica.

14. Encontrar la aproximación lineal estándar y estimar los valores de una función alrededor de un punto dado.

15. Utilizar polinomios de Taylor para obtener aproximaciones de los valores de una función alrededor de un punto dado.

Actividades y tarea

1. Revisa el material de las tres unidades anteriores, de acuerdo a lo que te señalan los indicadores de evaluación de esta unidad, especialmente el que no te haya quedado muy claro. ¡Esta es una excelente oportunidad para que revises a profundidad los temas que no hayas entendido bien en lo que va del curso y resuelvas todas tus dudas! **¡Asiste a asesoría tantas veces como te haga falta!** *No olvides que la calificación que obtengas en esta unidad valdrá el 40 % de tu calificación final.*

2. Entrega la tarea de la unidad 10, bien hecha y en limpio, antes de solicitar tu examen de esta unidad.

3. Entrega un ensayo en el que expliques como definió Leonhard Euler (1707-1783) la función exponencial y cómo la relacionó con las funciones trigonométricas. Tu ensayo debe ser de una cuartilla y debes escribirlo a mano, con tus propias palabras, de manera clara y con buena ortografía. *Recuerda que copiar textualmente de tu fuente de información sin dar el crédito correspondiente es un plagio.*

4. Procura aprobar esta unidad antes del último día de exámenes.

Tarea de la unidad 10

"Sólo se aprende haciendo las cosas; porque aunque creas saberlas, nunca tendrás la certeza hasta que lo intentes."
Sófocles (496 a. C. – 406 a. C.)

1. Calcula y' para cada una de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } y = \sqrt[5]{(x^2+1)^3 x^{\operatorname{sen} x}}, \qquad \text{(b) } y = \log_2(\arctan(e^{\cos x})), \qquad \text{(b) } y^x + x^y = xy.$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\text{(a)} \quad 5^{x^2} - 3^{x^2+1} = 2\left(5^{x^2-1} - 3^{x^2-2}\right), \qquad \text{(b)} \quad \log_2(9^{x-1}+7) = 2\log_2(3^{x-1}+1).$$

3. ¿Para qué valores de $p \geq 0$ son tangentes en un punto del primer cuadrante las gráficas de $y = x^p$ y $y = e^x$? *Sugerencia.* Recuerde que dos gráficas son tangentes en un punto si en ese punto coinciden y tienen la misma pendiente.

4. Determina los valores máximo y mínimo absolutos de $y = \arctan x - \ln(\sqrt{x})$ en el intervalo $[e^{-1}, e]$.

5. Se desea fabricar una tanque de gas estacionario de 1 m^3 de volumen, que tenga la forma de un cilindro de altura h y radio r, rematado en sus extremos con dos hemisferios de radio r. Determina las dimensiones h y r del tanque que requiera la mínima cantidad de lámina de acero para su construcción.

6. De todos los triángulos en el primer cuadrate que se forman con los ejes coordenados y las tangentes a la gráfica de la parábola $y = 4 - x^2$, determina las dimensiones del que tiene menor área.

7. Encuentre el rectángulo de área máxima que puede circunscribirse en un rectángulo de 2 m de ancho y 3 m de largo.

8. Por la banda derecha de un campo de futból se desplaza un futbolista preparándose para tirar a gol. ¿A qué distancia de la línea final debe realizar el tiro si se supone que lo hará justo cuando el ángulo con el que visualiza la portería (de poste a poste) es máximo. El campo de futból es de 110 por 90 y de poste a poste la portería mide 7 m.

9. Dada la función $y = (x-1)^4 - 4x^2 + 8x - 4$:

   a) Encuentra su dominio.
   b) Determina su paridad.
   c) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.
   d) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.
   e) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.
   f) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.
   g) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

10. Dada la función $y = (x+1)^2 e^{-3x}$:

   a) Encuentra su dominio.
   b) Determina su paridad.
   c) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.
   d) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.
   e) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.
   f) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.
   g) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

11. Dada la función $y = (\ln x)^2/x$:

   a) Encuentra su dominio.
   b) Determina su paridad.
   c) Encuentra sus ceros y sus intervalos de positividad.
   d) Determina sus puntos críticos y sus intervalos de monotonía.
   e) Determina sus puntos de inflexión y sus intervalos de concavidad.
   f) Encuentra las ecuaciones de sus asíntotas.
   g) Usa la información anterior para esbozar su gráfica.

12. Utilice un polinomio de Taylor de grado 7 alrededor de $a = 0$ para obtener un valor aproximado de $\ln(1/2)$. Obtenga una estimación del error.

Formulario de Cálculo CSAI81

Nemotecnia para recordar cifras de

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264 33\cdots$$

- Sol y luna y cielo confirman al divino autor del cosmo infinito $\cdots$
- May I have a large container of coffee? Thank you Gabri Palacios! $\cdots$
- How I need a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving tedious integrals $\cdots$
- How I need a drink, alcoholic of course, after the heavy lectures involving quantum mechanics $\cdots$

Fórmulas básicas para perímetros, áreas y volúmenes

1. **Perímetro**
   - Rectángulo de base b y altura a:
   $$P = 2a + 2b.$$
   - Polígono regular de n lados de longitud l:
   $$P = nl.$$
   - Círculo de radio r:
   $$P = 2\pi r.$$

2. **Área**
   - Triángulo de base b y altura a:
   $$A = \frac{ba}{2}.$$
   - Triángulo de lados a, b y c, *Fórmula de Herón de Alejandría:*
   $$A = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}.$$
   $S = (a+b+c)/2$ se llama semiperímetro del triángulo.
   - Rectángulo de base b y altura a:
   $$A = ab.$$

- Trapecio de base mayor B, base menor b y altura a:

$$A = \frac{(B+b)a}{2}.$$

- Polígono regular de n lados de longitud l y apotema de longitud a:

$$A = \frac{nla}{2} = \frac{Pa}{2}.$$

  El *apotema* de un polígono regular es la distancia entre el centro y cualquiera de sus lados.

- Círculo de radio r:

$$A = \pi r^2.$$

- Elipse de semiejes a y b:

$$A = \pi ab.$$

- Esfera de radio r:

$$A = 4\pi r^2.$$

- Área lateral de un cono de radio r y altura a:

$$A = \pi r\sqrt{r^2+a^2}.$$

3. **Volumen**

- Caja de altura a y base rectangular de lados b y c:

$$V = abc.$$

- Esfera de radio r:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

- Cilindro de radio r y altura a:

$$V = \pi r^2 a.$$

- Cono de radio r y altura a:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 a.$$

- Pirámide de altura a y base de área B:

$$V = \frac{1}{3}Ba.$$

Fórmulas e identidades trigonométricas

- **Teorema de Pitágoras.**

  En un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa h (Figura 1) se cumple la relación

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

  Recíprocamente, si en un triángulo de lados a, b y h se cumple la relación anterior, entonces es un triángulo rectángulo de catetos a y b e hipotenusa h.

- Funciones trigonométricas del ángulo θ (Figura 1):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{a}{h}, \qquad \cos\theta = \frac{b}{h}, \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}.$$

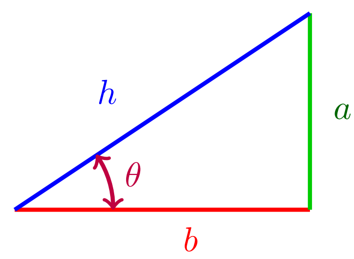

Figura 1: Triángulo rectángulo

- Las funciones trigonométricas de los ángulos de 45°, 30° y 60° se calculan fácilmente usando los triángulos de la Figura 2.

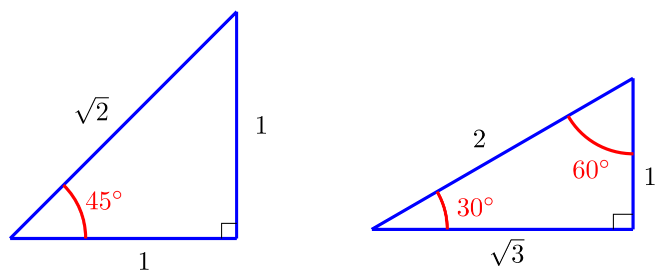

Figura 2: Triángulos especiales

- Funciones trigonométricas del ángulo t (Figura 3):

$$\operatorname{sen} t = y, \qquad \cos t = x, \qquad \tan t = \frac{y}{x}.$$

- Conversión de grados a radianes. Si la medida de un ángulo en grados es A y en radianes θ, entonces,

$$\theta \ = \frac{\pi}{180} A.$$

- Longitud l de un arco de θ radianes de un círculo de radio r:

$$l = \theta r.$$

- Área de un sector de θ radianes de un círculo de radio r:

$$A = \frac{1}{2} \theta r^2.$$

- Identidades trigonométricas básicas:

$$\tan\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}, \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}\theta}, \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}.$$

- **Identidades pitagóricas:**

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1, \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta, \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta.$$

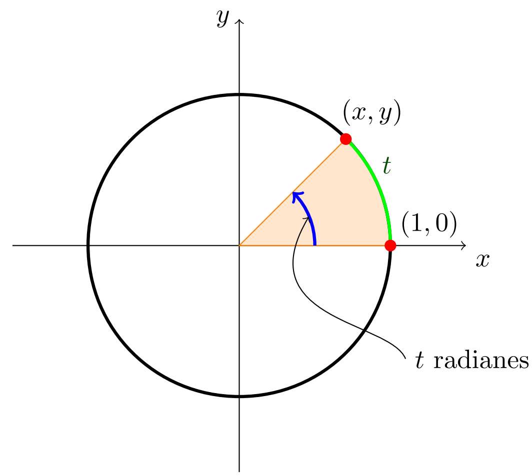

Figura 3: Círculo trigonométrico (de radio 1)

- **Fórmulas para la suma:**

$$\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \operatorname{sen} B \cos A, \qquad \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B.$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

- **Fórmulas para productos de senos y cosenos:**

$$2 \cos A \cos B = \cos(A - B) + \cos(A + B), \qquad 2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$$

$$2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A - B) + \operatorname{sen}(A + B)$$

- **Fórmulas para el ángulo doble y triple:**

$$\operatorname{sen}(2u) = 2 \operatorname{sen} u \cos u, \qquad \cos(2u) = \cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u.$$

$$\operatorname{sen}(3u) = 3 \operatorname{sen} u - 4 \operatorname{sen}^3 u, \qquad \cos(3u) = 4 \cos^3 u - 3 \cos u.$$

- **Fórmulas para el ángulo medio:**

$$\operatorname{sen}^2 u = \frac{1 - \cos 2u}{2}, \qquad \cos^2 u = \frac{1 + \cos 2u}{2}.$$

- **Ley de los senos.** *En un triángulo de lados a, b y c, cuyos ángulos opuestos respectivos son A, B y C, se satisface la relación*

$$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}.$$

- **Ley de los cosenos.** *En un triángulo de lados a, b y c, en el que C es el ángulo opuesto a c, se satisface la relación*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

- **Desigualdades notables**
  - $-|x| \leq \operatorname{sen} x \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}.$
  - $x \cos^2 x \leq \operatorname{sen} x \leq x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

Propiedades de exponenciales y logaritmos

1. $e^{x+y} = e^x e^y, \quad x, y \in \mathbb{R}.$
2. $(e^x)^y = e^{xy}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$
3. $\ln(e^x) = x, \quad x \in \mathbb{R}.$
4. $e^{\ln x} = x, \quad x > 0.$
5. $\ln(x^y) = y \ln x, \quad x > 0,\ y \in \mathbb{R}.$
6. $a^x = e^{x \ln a}, \quad a > 0, x \in \mathbb{R}.$
7. $a^x = b^{x \log_b a}, \quad a, b > 0, x \in \mathbb{R}.$
8. $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}, \quad x > 0,\ a > 0,\ a \neq 1.$
9. $\ln(xy) = \ln x + \ln y, \quad x > 0,\ y > 0.$
10. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y, \quad x > 0,\ y > 0.$
11. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}, \quad a > 0,\ b \neq 1,\ b > 0.$

Reglas básicas de derivación

Notación: $u' = \dfrac{du}{dx}$

- **Linealidad**

$$(cu)' = cu', \qquad (u \pm v)' = u' \pm v'.$$

- **Regla del producto**

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \qquad \text{o bien} \qquad (uv)' = u'v + uv'.$$

- **Regla del cociente**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2} \qquad \text{o bien} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}.$$

- **Regla de la cadena**

$$(f \circ g)'(a) = f'\left(g(a)\right) g'(a) \qquad \text{o bien} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

- **Diferenciación logarítmica**

$$(\ln \mu)' = \frac{\mu'}{\mu}.$$

- **Otras fórmulas**

1. Si c es una constante, $(c)' = 0$
2. $(|u|)' = \dfrac{u}{|u|}(u')$
3. $(u^n)' = nu^{n-1}u'$
4. $(a^u)' = (\ln a)a^u u'$
5. $(e^u)' = e^u u'$
6. $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{(\ln a)u}$
7. $(\operatorname{sen} u)' = (\cos u)u'$
8. $(\cos u)' = -(\operatorname{sen} u)u'$
9. $(\tan u)' = (\sec^2 u)u'$
10. $(\cot u)' = -(\csc^2 u)u'$
11. $(\sec u)' = (\sec u \tan u)u'$
12. $(\csc u)' = -(\csc u \cot u)u'$
13. $(\operatorname{arc\,sen} u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
14. $(\arccos u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
15. $(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$
16. $(\operatorname{arccot} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

17. $(\text{arcsec } u)' = \dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

18. $(\text{arccsc } u)' = -\dfrac{u'}{|u|\sqrt{u^2-1}}$

Sumas notables

- $1+2+3+\cdots+k = \dfrac{k(k+1)}{2}$
- $1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2 = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$
- $1^3+2^3+3^3+\cdots+k^3 = \left(\dfrac{k(k+1)}{2}\right)^2$
- Si $r \neq 1$ entonces $1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n = \dfrac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Fórmulas básicas de integración

- **Linealidad de la integral**

$$\int kf(u)du = k\int f(u)du,\ k\in\mathbb{R}; \qquad \int (f(u)\pm g(u))\,du = \int f(u)du \pm \int g(u)du.$$

- **Fórmula de integración por partes**

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad \text{o bien} \qquad \int udv = uv - \int vdu.$$

- **Regla de sustitución o de cambio de variables.** Si $u = g(x)$, entonces

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du \qquad \text{o} \qquad \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du.$$

- **Otras fórmulas:**

1. $\displaystyle\int du = u + C$
2. $\displaystyle\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$
3. $\displaystyle\int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C,\ u\neq 0$
4. $\displaystyle\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C,\ a>0,\ a\neq 1$
5. $\displaystyle\int e^u du = e^u + C$
6. $\displaystyle\int \operatorname{sen} u\ du = -\cos u + C$
7. $\displaystyle\int \cos u\ du = \operatorname{sen} u + C$
8. $\displaystyle\int \tan u\ du = -\ln|\cos u| + C$
   $= \ln|\sec u| + C$
9. $\displaystyle\int \cot u\ du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$
10. $\displaystyle\int \sec u\ du = \ln|\sec u + \tan u| + C$
11. $\displaystyle\int \sec^2 u\ du = \tan u + C$
12. $\displaystyle\int \csc u\ du = -\ln|\csc u + \cot u| + C$
13. $\displaystyle\int \csc^2 u\ du = -\cot u + C$
14. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C,\ a\neq 0$

15. $\displaystyle\int \csc u \cot u \; du = -\csc u + C$

16. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{arcsen} \frac{u}{a} + C, \; a \neq 0$

17. $\displaystyle\int \sec u \tan u \; du = \sec u + C$

18. $\displaystyle\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}}$
$$= \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \left| \frac{u}{a} \right| + C, \; a \neq 0.$$

Integrales impropias notables

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \pi, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \pi.$$

Integrales no expresables como funciones elementales

1. $\displaystyle\int e^{-x^2} dx.$
2. $\displaystyle\int x^{2n} e^{cx^2} dx, \qquad c \neq 0, \; n$ entero.
3. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx.$
4. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x} dx.$
5. $\displaystyle\int x^{-n} e^{cx} dx, \qquad c \neq 0, \; n > 0$ entero.
6. $\displaystyle\int \sqrt{\ln x} \; dx.$
7. $\displaystyle\int \ln(\ln x) \; dx.$
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}.$
9. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{1 + x^2} dx.$
10. $\displaystyle\int \frac{e^{cx}}{1 + x^2} dx, \qquad c \neq 0.$
11. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{1 + x^2} dx.$
12. $\displaystyle\int e^{cx} \arctan x \; dx, \qquad c \neq 0.$
13. $\displaystyle\int \sqrt[3]{1 + x^2} \; dx.$
14. $\displaystyle\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \; dx.$

Fórmula de Taylor

Si $y = f(x)$ es una función con $n+1$ derivadas en un intervalo abierto I que contiene al punto a, entonces para cada $x \in I$ hay un número c entre a y x para el cual se cumple

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde $P_n(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n de la función $f(x)$ en a dado por

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n;$$

y $R_n(x)$ es el residuo de Taylor de $f(x)$ en a dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}.$$

Si $x \approx a$ entonces $f(x) \approx P_n(x)$ y el error de la aproximación es $|R_n(x)|$.