ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS (EDOSAI)

TEMARIO

T. 16-O

◊◊◊◊◊

ORGANIZACIÓN DEL CURSO POR UNIDADES

CONTENIDO SINTÉTICO: 1. Ecuaciones diferenciales de primer orden y sus aplicaciones. 2. Ecuaciones diferenciales de segundo orden y sus aplicaciones.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

UNIDAD 1 ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES Y HOMOGÉNEAS. DECAIMIENTO RADIACTIVO

UNIDAD 2 ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y FACTORES INTEGRANTES. CRECIMIENTO DE POBLACIONES.

UNIDAD 3 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES Y DE BERNOULLI. MEZCLAS

UNIDAD 4 UNIDAD DE INTEGRACIÓN I.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

UNIDAD 5 INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA GENERAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES. LOS MÉTODOS DE REDUCCIÓN DE ORDEN Y VARIACIÓN DE PARÁMETROS.

UNIDAD 6 MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS.

UNIDAD 7 INTRODUCCIÓN A VIBRACIONES MECÁNICAS.

UNIDAD 8 UNIDAD DE INTEGRACIÓN II.

BIBLIOGRAFÍA:

1. Ecuaciones Diferenciales Técnicas de Solución y Aplicaciones. José Ventura B. y David Elizarraraz M., Primera Edición 2004, UAM – A, el **Libro de Texto** http://www.uamenlinea.uam.mx/materiales/matematicas/ec_dif/BECERRIL_ESPINOSA_JOSE_VENTURA_Ecuaciones_diferenciales_tecn.pdf

2. Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera. Nagle, Saff, Snider. Tercera Edición 2001, Addison Wesley.

https://rodrigogutierrez-pmc.wikispaces.com/file/view/Ecuaciones_Diferenciales_y_problemas_con_valores_+libro.pdf

UNIDAD 1

♦♦♦

ECUACIONES DIFERENCIALES DE VARIABLES SEPARABLES Y HOMOGÉNEAS

♦♦♦

Objetivos específicos: Al finalizar la unidad el alumno será capaz de resolver ecuaciones diferenciales de variables separables y homogéneas. Resolver problemas que involucren el fenómeno de decaimiento radiactivo.

En el libro de texto[1] estudiar del capítulo 1 la sección 1.2, y del capítulo 2 las secciones 2.1 y 2.2, incluidos los ejemplos de dichas secciones. Del capítulo 3 estudiar la sección 3.3.1.

Resolver los siguientes ejercicios y entregarlos por escrito:

SECCIÓN	EJERCICIOS
2.1	7, 8, 9, 10
2.2	4, 6, 7, 10
3.3.1	4

A. Una seria y respetable tienda de antigüedades le ofrece a Usted una reliquia de los tiempos de Cristo, que se considera sagrada y casi milagrosa, el precio es cincuenta millones de dólares. Ya que Usted está interesado en adquirir la reliquia.
Tomando sus precauciones, solicita le permitan tomar una muestra (pequeña) de la reliquia. Por otra parte, adquiere una pieza actual y toma una muestra del mismo tamaño y de la misma parte. Ambas muestras las manda al laboratorio. Los resultados del estudio del laboratorio son: la reliquia contenía 5.3×10^{10} átomos de C^{14} por gramo y la pieza actual es 6.6×10^{10} átomos de C^{14} por gramo. ¿Usted compararía la reliquia? Justifique su respuesta.

[1] Ecuaciones Diferenciales Técnicas de Solución y Aplicaciones, J. V. Becerril Espinosa y D. Elizarraraz Martínez, Primera Edición 2004, UAM-A.

UNIDAD 2

♦♦♦

ECUACIONES DIFERENCIALES EXACTAS Y FACTORES INTEGRANTES

♦♦♦

Objetivos específicos: Al finalizar la unidad el alumno será capaz de resolver ecuaciones diferenciales exactas. Resolver ecuaciones diferenciales no-exactas que tengan un factor integrante del tipo que el libro de texto desarrolla. Resolver problemas de crecimiento de poblaciones, caso maltusiano (crecimiento exponencial) y logístico.

En el libro de texto estudiar el capítulo 2, las secciones 2.3 y 2.4, incluidos los ejemplos. Del capítulo 3 estudiar la subsección 3.3.3.

Resolver los siguientes ejercicios y entregarlos por escrito:

SECCIÓN	EJERCICIOS
2.3	7, 9
2.4	7, 8, 9, 10

A. "*La educación sobre la diabetes se ha vuelto no solo un elemento de tratamiento, sino el propio tratamiento*". Dr. Elliot P. Joslin
Los censos de población y vivienda de los años 2000 y 2010 para nuestro país, ver la página de Inernet del INEGI, mostraron una población de 97.483412 millones y 112.336538 millones, respectivamente. Se tienen las siguientes estimaciones: la población mexicana crecerá a lo más 160 millones y el 13% de la población de México será diabética en el año 2030. Uno de tantos estudios sobre el costo de la diabetes en nuestro país dice: "cada paciente con diabetes le cuesta 708 dólares al año (en promedio) en México", cita tomada del artículo del Dr. Armando Arredondo
http://www.valueinhealthjournal.com/article/S1098-3015(11)01438-0/pdf
¿Cuánto se invertirá en la enfermedad de la diabetes en México en el año 2030? Tomando el costo estimado por el Dr. Arredondo para el año 2011.

B. Calcule un factor integrante de la forma $\mu = x^m y^n$ y resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales.
   a. $(xy + x^2 y \ln y)dx + \left(x^2 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{4}{5}x^3 \ln y\right)dy = 0$
   b. $(2y^2 - 6xy)dx + (3xy - 4x^2)dy = 0$

UNIDAD 3

♦♦♦

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES Y DE BERNOULLI

♦♦♦

Objetivos específicos: Al finalizar la unidad el alumno será capaz de resolver ecuaciones diferenciales lineales y de Bernoulli. Resolver problemas de mezclas.

En el libro de texto estudiar el capítulo 2, las secciones 2.5 y 2.6, incluidos los ejemplos. Del capítulo 3 estudiar la subsección 3.3.2 y la sección 3.4, así como el material anexo a esta unidad.

Resolver los siguientes ejercicios y entregarlos por escrito:

SECCIÓN	EJERCICIOS
2.5	2, 6, 9
2.6	4, 7, 9, 10
3.3.2	12

A. De desea descontaminar el lago de Ontario, la concentración de contaminantes actual es 0.25% y se planea reducir la concentración a 0.08%. El volumen del lago es de 1636 km^3 y recibe un derrame anual de agua con contaminantes al 0.05%. Determinar cuál de los dos métodos es más rápido para descontaminar el lago, con flujo de entrada y salida iguales o cuando son diferentes. Compare las dos situaciones siguientes.
   a. Cuando los flujos de entrada y salida son 209 km^3/año.
   b. Ahora, suponga que el flujo de entrada es 209 km^3/año y el flujo de salida es 156 km^3/año.

B. En cierta parte de la costa de Alaska, se estima que la masa inicial de cierto tipo de sardina es de 7 millones de toneladas. Dicha masa, de dejarse sola, aumentaría a una razón de cambio proporcional a la masa, con una constante de 2/año. Sin embargo, la pesca comercial elimina una masa de sardinas de 15 millones de toneladas por año. ¿En qué momento se terminarán las sardinas? Si la razón de pesca se modifica de modo que la masa de sardinas permanezca constante, ¿cuál debería ser dicha razón?

C. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales por substitución lineal.
   a. $y' = \sin(x+y)$
   b. $y' = 2 - \sqrt{2x - y + 3}$

UNIDAD 4

♦♦♦

UNIDAD DE INTEGRACIÓN A

♦♦♦

Objetivos específicos: Al finalizar la unidad el alumno será capaz de resolver ecuaciones diferenciales de orden uno del tipo que se encontró en las unidades anteriores. Ahora la dificultad consiste en que no se sabe qué tipo de ecuación diferencial se enfrenta. Resolver problemas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de orden uno de los siguientes tipos: crecimiento de poblaciones (exponencial y logístico), mezclas y decaimiento radiactivo.

En el libro de texto repasar, si lo requiere, del capítulo 2 las secciones 2.1-2.6. Del capítulo 3 repasar las secciones 3.3 y 3.4.

Resolver los siguientes ejercicios y entregarlos por escrito:

A. Resuelva el siguiente popurrí de ecuaciones diferenciales:
1. $2x^{-3}\frac{dy}{dx} + 3x^{-2}y = 3\sqrt[3]{y}$
2. $(2x^2 - x^{-1}y^3 - 2x^{-2}y^{-1})dx + \left(\frac{4}{5}x^3y^{-1} - \frac{5}{2}y^2 - 2x^{-1}y^{-2}\right)dy = 0$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{2(x+y)^2}{1-(x+y)^2}$
4. $\left(\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)dx + \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)dy = 0$
5. $\left(\frac{3y}{\sqrt[4]{x}}\right)dx + \left(2x^{3/4} - 4y\sin\sqrt{y}\right)dy = 0$
6. $(x^3 + y^3)dx - x(x^2 + y^2)dy = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = \frac{y(1+\sqrt{y})}{(xy)^2 - x(1+\sqrt{y})}$
8. $(2xy + y^{-1}e^{-y} + xe^{-y})dx + \left(2x^2 + x^2y + \left(\frac{x^2}{2}\right)y^{-1}e^{-y} + y\right)dy = 0$
9. $1 + 3\frac{dy}{dx} = e^{(2x+3y)}$

B. Se requiere anestesiar a un tigre joven, para reincorporarlo a su habitab de origen, el viaje para trasladarlo dura 2 días con 17 horas. Para que el tigre no despierte se quiere que la cantidad retenida en el torrente sanguíneo de la anestesia se mantenga superior a 0.00057 mg/peso. Al tigre se le va a administrar tres dosis y cada dosis se administra cada 24 horas. La vida media de la anestesia es de 9.7 horas. Determinar la cantidad inicial mínima que hay que administrar al tigre que pesa 487 kg.
Se recomienda estudiar y/o revisar el material que se encuentra en la página http://xtsunxet.usc.es/macias/material/curso_farmacia_actual/apuntes_cap7.pdf
(El mérito de haber encontrado esta página es de Hilario, un exalumno de nuestro curso edosai).

C. "La educación sobre la diabetes se ha vuelto no solo un elemento de tratamiento, sino el propio tratamiento". Dr. Elliot P. Joslin
Según los datos proporcionados por la página http://populationpyramid.net/, la población mundial en los años 1990, 2000 son 5,307.667 millones y 6,126.622 millones. La misma página de Internet estima que la población máxima de la raza humana crecerá a lo más en 11,200 millones.
Por otra parte, la International Diabetes Federation (IDF) (la página de dicha institución es http://www.idf.org/), nos informa "que uno de cada 10 adultos serán diabéticos", en el año 2040. Estime los millones de diabéticos que serán en el año 2040.

D. Para la solución de la ecuación logística: $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2$, suponga que conoce $x(0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ y $x(2t_1) = x_2$ $(t_1 > 0)$ (aparte del valor inicial de la población, se conocen dos valores de la población igualmente espaciados).

a. Con los valores x_0, x_1, x_2 y t_1, determine la población máxima que alcanzará la población "$\frac{a}{b}$" y algo así como la capacidad de crecimiento innata de la población el número "a".

$$\frac{a}{b} = \frac{2x_2x_1x_0-(x_2+x_0)x_1^2}{x_2x_0-x_1^2}.$$

$$a = \frac{-1}{t_1}\ln\left[\frac{(x_2-x_1)x_0}{(x_1-x_0)x_2}\right]$$

b. Use las poblaciones mundiales dadas en el ejercicio C., más la información de la población mundial 6,929.715 millones para el año 2010. Aplicando el inciso a., determine la capacidad de crecimiento máximo de la raza humana, que se predice por un modelo de crecimiento logístico (el número $\frac{a}{b}$), así como la capacidad neta de crecimiento, "a".

E. El lago de Ontario tiene un volumen de 1636 km^3 y una concentración inicial de contaminantes del 0.56%. El lago de Ontario recibe un flujo anual del lago Erie (vía el río Niágara) de 410 km^3 de agua con una concentración de contaminantes del 0.07% y, el lago (de Ontario) vacía su cauce dentro del río Lawrence con flujo anual 367 km^3. ¿Cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminantes inicial en el lago se reduzca al 0.23%?

UNIDAD 5

♦♦♦

TEORÍA GENERAL DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES METODOS DE REDUCCIÓN DE ORDEN Y VARIACIÓN DE PARÁMETROS

♦♦♦

Objetivos específicos: Al finalizar la unidad el alumno será capaz de resolver ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, homogéneas y no-homogéneas, usando el método de reducción de orden y variación de parámetros.

Hacer una copia del archivo pdf de las notas "Dependencia e independencia lineal de soluciones" y estudiarlas. En el libro de texto estudiar del capítulo 4 las secciones: 4.1, 4.2, 4.3, 4.4 y 4.8.

Resolver los siguientes ejercicios y entregarlos por escrito.

SECCIÓN	PAGINAS	EJERCICIOS
4.3	132	5, 8, 12
4.4	139	4, 7, 10
4.8	178	3, 6, 13, 15

A. Para las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^2|x|$, consideradas en el intervalo $-2 \leq x \leq 3$.
   a. Muestre que el wronskiano es idénticamente cero.
   b. Sin embargo, usando la definición de independencia las funciones, compruebe que $f(x)$ y $g(x)$ son linealmente independientes en dicho intervalo.

B. Considere la ecuación diferencial lineal homogénea $xy'' - y' - 4x^3y = 0$, y considere las soluciones $y_1 = e^{x^2}$ y $y_1 = e^{-x^2}$.
   a. Del siguiente par de soluciones de la ecuaciones diferencial, determine cuál par de soluciones es linealmente independientes: $\{e^{x^2+2}, 3e^{x^2-3}\}$, $\left\{e^{-x^2} + 7e^{x^2}, \frac{1}{7}e^{-x^2} + e^{x^2}\right\}$, $\{\cosh x^2, \sinh x^2\}$.
   b. Para aquel par de soluciones que sea linealmente independientes, resuelva el problema con valores iniciales: $y(1) = 1, y'(1) = -1$.

Nota: $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ y $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

UNIDAD 6

♦♦♦

MÉTODO DE COEFICIENTES INDETERMINADOS

♦♦♦

Objetivos Específicos: Aprender el "método de coeficientes indeterminados" (mci). Que es una alternativa al método de variación de parámetros. En general mci es un método más rápido para calcular una solución particular para las ecuaciones diferenciales lineales no-homogéneas con coeficientes constantes:

$$ay'' + by' + cy = g(x),$$

donde $g(x)$ es un polinomio; un polinomio por una exponencial; un polinomio una exponencial por un coseno o un seno. Únicamente en estos casos es posible aplicar mci.

Se recomiendan tres métodos: "el método del polinomio anulador", sección 4.7 del libro de texto, Método de la "Transformada de Laplace" (se usan los números complejos) y el "Método de Operadores" (también, se usan los números complejos), de los dos últimos métodos tenemos algunos ejemplos resueltos, solicitar hacer copia Xerox de este material. De estos tres métodos tú decides cual seleccionar.

Resolver los siguientes ejercicios y entregarlos por escrito:

SECCIÓN	EJERCICIOS
4.7	21, 26, 30, 31, 32, 35, 42

A. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales
   a. $y''+y = \tan^2 x + xe^{-x}$
   b. $y''+4y = \dfrac{1}{\cos 2x} + x\sin 2x$

UNIDAD 7

♦♦♦

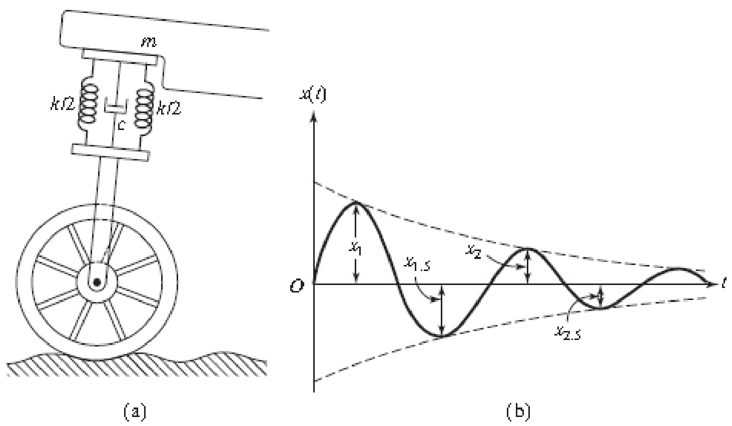
INTRODUCCIÓN A VIBRACIONES MECÁNICAS

♦♦♦

1. Un cuerpo que pesa 20 libras sujeto al extremo de un resorte lo estira 0.32 ft. El peso se desplaza 6 pulgadas hacia debajo de la posición de equilibrio y desde ahí se le comunica una velocidad dirigida hacia arriba de 5 ft/s.
    a. Determine la ecuación del movimiento.
    b. ¿En qué instantes está el cuerpo 1/3 ft abajo de la posición de equilibrio?
    c. ¿En qué instantes está el cuerpo 1/3 ft abajo de la posición de equilibrio por cuarta vez en dirección hacia arriba?
    d. ¿En qué instantes está el cuerpo 1/3 ft abajo de la posición de equilibrio por quinta vez en dirección hacia abajo?

2. La máxima velocidad que alcanza la masa de un oscilador armónico es de 10 cm/s, y el periodo de oscilación es de 2 segundos. Si la masa se pone en movimiento con un desplazamiento inicial de 2 cm debajo de la posición de equilibrio, determinar (a) la amplitud, (b) la velocidad inicial, (c) la máxima aceleración y (d) el ángulo fase.

3. Para una motocicleta se ha diseñar un amortiguador que cuando se someta a una velocidad inicial, debido a un tope de carretera, las constantes de rigidez y amortiguamiento del resorte deben ser las necesarias para cumplir $|x_{1.5}| = x_1/4$ (ver figura). La masa de motocicleta es 200 kg y periodo de vibración es de 2 segundos. Determinar las constantes de rigidez y amortiguamiento para cumplir las características de tal diseño.



4. Los resortes de un remolque de automóvil están comprimidos 10.16 cm bajo su peso. El remolque entra por una carretera con perfil aproximado por una onda sinusoidal de 7.62 cm de amplitud y una longitud de onda de 14.63 m, considere que no hay amortiguamiento.
   a. Halle la velocidad crítica (de resonancia) cuando el remolque viaja por la carretera sinusoidal.
   b. Determine amplitud de la solución particular, cuando el remolque viaja sobre la carretera sinusoidal con una velocidad de 64.4 km/h.
   c. Si el remolque aborda la carretera sinusoidal con la velocidad crítica. Determine el máximo alargamiento que sufren los resortes en el lapso de los primeros 33 segundos. Considere que el remolque entró a la carretera con condiciones iniciales $x_0 = x'_0 = 0$.

5. Cuando el Millennium Bridge (El Puente del Milenio) en Londres fue abierto por primera vez, se presentó un balanceo en el puente de lado a lado cuando la gente lo cruzaba; puedes ver este movimiento en el video London Millenium Bridge Opening

   https://www.youtube.com/watch?v=gQK21572oSU.

   Las pisadas crean unos pequeños movimientos de lado a lado del puente, el cual entonces fue aumentado por la tendencia de la gente a ajustar sus pasos para compensar el balanceo. Más allá del número crítico de peatones (alrededor de 160) el puente empieza a balancearse violentamente.
   Sin peatones, el desplazamiento x de un punto representativo sobre el puente más allá de su posición normal debe satisfacer
   $$Mx'' + \beta x' + kx = 0 \,,$$
   donde $M \approx 4 \times 10^5$ kg, $\beta \approx 5 \times 10^4$ kg/s y $k \approx 10^7$ kg/s^2.
   La fuerza forzada de cada peatón se encontró experimentalmente ser proporcional a x' (la cual se encontró experimentalmente, y que involucró a una cantidad variable de gente cruzando el puente), con $F \approx 300x'$.
   Si hay $\mathcal{N}$ peatones, el desplazamiento del puente satisface
   $$Mx'' + \beta x' + kx = 300\mathcal{N}x'.$$

   a. Encuentre el número crítico $\mathcal{N}_0$ de peatones, tal que si hay más de $\mathcal{N}_0$ peatones el puente ya no es más un sistema amortiguado. Muestre que si hay 200 caminantes entonces habrá oscilaciones con frecuencia de aproximadamente 0.8 hertz (oscilaciones por segundo) la amplitud de la oscilación crece como $e^{t/80}$.
   b. El problema se corrigió adicionando amortiguamiento, una gran parte fue esencialmente por una colección de amortiguadores, hasta alcanzar el amortiguamiento de 20% del nivel del amortiguamiento crítico β_c ($\beta_c = \sqrt{4Mk}$), es decir $\beta_1 = \beta + 0.2\beta_c$. ¿Cuál debe ser este valor de β_1, y el número de gente que puede ahora cruzar el puente sin contrarrestar todo el amortiguamiento?
   c. Al sistema se le aplica una fuerza externa $F(t) = 2\sin\omega t$. Estando el sistema en resonancia se desea determinar la fracción $a, 0 < a < 1$, del amortiguamiento crítico necesaria para que la constante de amortiguamiento μ del sistema forzado,

$$Mx'' + \mu x' + kx = 2\sin \omega t,$$

donde $\mu = \beta + a\beta_c - 300\mathcal{N}$, satisfaga que la amplitud forzada (amplitud de la solución particular) sea menor que 1.5 cm. ¿Existe tal constante de amortiguamiento μ? Pues la resonancia sólo puede ocurrir si la constante de amortiguamiento del sistema subamortiguado es menor que $\frac{\beta_c}{\sqrt{2}}$ (ver la fórmula (5.36) de su libro de texto, página 205). Considere el número personas $\mathcal{N}$ que encontró en el inciso b).

Para un detallado análisis de la resolución al problema del balanceo del Puente del Milenio, bajar el artículo: The London Millennium Footbridge, P. Dallart et al.

https://researchcourse.pbworks.com/f/structural+engineering.pdf

UNIDAD 8

♦♦♦

UNIDAD DE INTEGRACIÓN B

♦♦♦

1. Resolver

   a. $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+y^3}$

   b. $(x^3 + y^3)dx - (x^3 + xy^2)dy = 0$

   c. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}, \quad y_1 = x^{-1/2}\cos x$

2. Considere un sistema masa-resorte con masa $m = 50\ kg$, constante de restitución $k = 1250\ kg/m$ y condiciones iniciales $x_0 = x'_0 = 0$, además en el sistema hay una fuerza externa $F = 5\sin\omega t\ \ N$.
   a. Si el sistema masa-resorte desde el inicio del movimiento está en resonancia, determine el máximo alargamiento que el resorte sufre en el lapso de los primeros 37 segundos debe haberse iniciado el movimiento.
   b. Se reinicia el movimiento. Con el propósito de reducir la amplitud forzada a un veinteavo del máximo alargamiento que se encontró en a), se introduce amortiguamiento al sistema. Determine la constante de amortiguamiento que cumpla con dicha especificación.

3. El Lago de Chapala está siendo envenenado por el Rio Lerma. La gente fuerza al Rio Lerma a ingerir toxinas desde la agricultura (fertilizantes químicos, pesticidas y abono porcino), la industria (metales pesados) y las descargas de aguas negras domésticas inadecuadamente tratadas.
   El balance de los flujos de agua en el Lago de Chapala (aclaración Mm^3 significa millones de metros cúbicos). Entrada: precipitación, 711 Mm^3/año; la cuenca propia, 179 Mm^3/año; y ríos, 273 Mm^3/año. Salida: evaporación, 1,394 Mm^3/año; ríos y bombeo, 272 Mm^3/año.
   Se halló de 2 a 50 $\mu g/l$ de ácido 2.4-diclorofenoxiacético (2.4-D), un herbicida que se usa en cultivos de cereales y huertos.
   ¿Cuál debe ser la concentración c_1 ($\mu g/l$) del flujo de entrada para que el herbicida 2.4-D sea reducido a 20 $\mu g/l$ en un periodo de 50 años? Suponga que la concentración inicial de ácido 2.4-D es 40 $\mu g/l$.