UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2019: 19-O.

EXAMEN # 3. PARA HACER EN CLASE.
FECHA: **VIERNES 13 DE MARZO DE 2020.**

Nombre: ANSWER KEY.

Instrucciones:

- El examen para CLASE consta de **DOS** problemas de 30 puntos. Vale 60 de 100 puntos en total.
- Tienen **una** hora con **veinticinco (25)** minutos para resolverlos.
- **Apaguen sus celulares**. Evíten la pena de quitarles sus exámenes.
- Para recibir puntaje, conteste correctamente, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE. Muestre sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) **(30 puntos.)** Considere un sistema masa resorte con masa 2 kg., y constante de Hooke 8 N/m. Suponga que una fuerza externa actúa sobre dicho sistema y es $f(t) = 4e^{-t}$. Dicho sistema se introduce en un sistema viscoso de constante b N.seg/m.
  (a) Encuentre el valor de b para que el sistema sin forzamiento externo sea críticamente amortiguado.
  (b) Encuentre la posición de sistema masa-resorte con viscosidad y forzamiento externo a cualquier instante t.

(2) **(30 puntos.)** Considere un resorte al cual se le sujeta un cuerpo de masa 200 gr. y lo estira 20 cm al colgarlo del techo y quedar en equilibrio. Del equilibrio, se estira otros 20 cm hacia abajo y se le da un impulso inicial de 50 cm/seg hacia abajo.
  Suponga que la fricción es despreciable. Suponga también que $g = 10\text{m/seg}^2$. No hay fuerzas externas adicionales tampoco.
  (a) Encuentre la posición en cualquier instante t.
  (b) Encuentre la amplitud y desfasamiento de la posición del cuerpo.
  (c) Escriba la solución en términos de la amplitud y fase.
  (d) Encuentre la frecuencia angular del movimiento, la frecuencia y el periodo.
  (e) ¿En qué instante pasa por primera vez por el punto de equilibrio?

Exam #3 ANSWER KEY (IN-CLASS EXAM).

(1) The equation is:

$$2\ddot{y} + b\dot{y} + 8y = 4e^{-t}.$$

(a) The non-forced eq'n:

$$2\ddot{y}_h + b\dot{y}_h + 8y_h = 0.$$

This is a linear, constant coefficients, homogeneous Diff Eq'n;

$y_h(t) = e^{rt}$; find r = const.

$$2r^2 + br + 8 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-64}}{2\cdot 2}.$$

To be critically damped $b^2 - 64 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 8\ N/\text{seg}/\text{m}}$

$$\Rightarrow r_{1,2} = \frac{-8}{4}$$

$$r = -2/\text{seg}$$

(b) The forced eq'n is:

$$2\ddot{y} + 8\dot{y} + 8y = 4e^{-t}.$$

The homogeneous eq'n $2\ddot{y}_h + 8\dot{y}_h + 4y_h = 0$ has the general solution:

$$y_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t}.$$

Proposing $y_p(t) = Ae^{-t}$ (does not repeat the homogeneous eq'n solution). Then:

$$2Ae^{-t} + 8(-Ae^{-t}) + 8(Ae^{-t}) = 4e^{-t}.$$

$$\Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow \underline{A = 2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t} + 2e^{-t}}$$

(2) At equilibrium: $k\ell = mg \Rightarrow k = \frac{mg}{\ell} = \frac{0.2\,kg\,(10)\,m/seg^2}{0.2\,m}$

$$\Rightarrow \boxed{k = 10\,N/m}$$

There is no external forces neither friction.

Newton's law reads: $m\ddot{y} + ky = 0 \Rightarrow \frac{2}{10}\ddot{y} + 10y = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{y} + 50\,y = 0}$$

Solution $\boxed{y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin \omega t}$

with $\boxed{\omega = \sqrt{50}\,/seg}$ as the angular frequency.

Since $y(\ ) = y_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$,

then $\boxed{y(t) = -\frac{1}{5}\cos(\sqrt{50}\,t) - \frac{1}{2\sqrt{50}}\sin(\sqrt{50}\,t)}$ meters

(b) Angular frequency $= \boxed{\omega = \sqrt{50}\,/seg \approx 7.07\,/seg}$

Amplitude $= A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{4 \cdot 50}}$ $\boxed{A = \frac{3}{\sqrt{200}} \text{ meters}}$

$$\boxed{A \approx 0.2121\,m}$$

$$\tan \varphi = \frac{C_2}{C_1} = \frac{-.5}{-2\sqrt{50}} \approx \frac{5}{14.1421} \approx 0.35355$$

Since $C_1 < 0$: $\varphi = \text{Arctan}(0.35355) + \pi \approx 0.33983 + \pi$

$$= \boxed{\varphi \approx 3.48429}$$

(c) $\boxed{y(t) = \frac{3}{\sqrt{2}\,10} \cos\left(\sqrt{50}\, t - 3.481429\right) \text{ meters}}$

(d) $\boxed{\omega = \sqrt{50}/\text{seg}}$ $\quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{50}}{2\pi} \frac{1}{\text{seg}} \approx \boxed{1.125/\text{seg}}$

$$\text{Period} = \frac{1}{\nu} = \boxed{P = 0.88 \text{ seg}}$$

(e) Require: $\cos(\omega t - \varphi) = 0$.

The first zero is at $\frac{\pi}{2}$ $\quad \omega t - \varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow t = \frac{1}{\omega}\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \boxed{t \approx 0.7145 \text{ seg}}$$

Remark: Since $\cos\theta = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

$$y(t) = \frac{3}{\sqrt{2}\,10} \cos\left(\sqrt{50}\, t - 3.481429\right)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}\,10} \sin\left(\sqrt{50}\, t - 3.481429 + \frac{\pi}{2}\right)$$

Thus

$$\boxed{y(t) = \frac{3}{\sqrt{2}\,10} \sin\left(\sqrt{50}\, t - 1.911063\right)}$$

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - AZCAPOTZALCO
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS.
TRIMESTRE: OTOÑO DE 2019: 19-O.

TAREA-EXAMEN # 3.
FECHA: **VIERNES 13 DE MARZO DE 2020.**
FECHA DE ENTREGA: **LUNES 16 DE MARZO DE 2020.** 3:00 pm

Nombre: ANSWER KEY.

Instrucciones:

- Esta parte del examen es para llevar a casa. Consta de **UN** problema de 40 puntos cada uno. Vale 40 de 100 puntos en total.
- Este examen es para resolver de forma individual. Asegúrense de entender lo que escriben, pues puedo preguntarles de forma personal y directa con preguntas muy específicas.
- Para recibir puntaje, conteste correctamente, escriba de forma clara y concisa. Entregue su trabajo limpio y con sus ideas en orden. SIMPLIFIQUE. Muestre sus cuentas. **EXPLIQUE, ARGUMENTE y JUSTIFIQUE** sus respuestas.
- Problema **SIN desarrollo, justificación o argumento** vale **CERO** puntos.

PROBLEMAS

(1) (**40 puntos.**) Considere un resorte de longitud natural de 50 cm (es decir, no está sometido a fuerza alguna y esa es su longitud al comprarlo en la tlapalería). Al resorte le sujeta una partícula de masa de 100 gr. y al colgarlo lo estira 10 cm. Le quita dicho cuerpo y le pone otro diferente de 200 gr. Lo hace colgar hasta llegar al equilibrio. Lo sumerge en un líquido de constante de fricción de 2 N.seg/m. (Suponga que no hay fuerzas de Arquímedes, i.e., de flotación). Del equilibrio, usted lo estira otros 10 cm y le da un impulso hacia abajo de 20 cm/seg. Suponga también que $g = 10\text{m/seg}^2$. No hay fuerzas externas adicionales tampoco.

(a) Encuentre la posición (con respecto al equilibrio) en cualquier instante t.

(b) Si el resorte alcanza una longitud total de más de 1 metro, se sabe que dicho resorte se rompe. De acuerdo a las condiciones de este problema, ¿se romperá el resorte? (Nota: En este inciso requerirá de usar un software que le ayude a resolver una ecuación trascendente, es decir, que involucre exponenciales, senos, cosenos y quizá polinomios, todos juntos en la misma ecuación, o bien para graficar la solución).

Examen #3. Parte para llevar: ANSWER KEY

(1) First, we have to compute Hooke's constant. By equilibrium of Hooke's force and gravity:

$$k \Delta L_1 = m_1 g \Rightarrow k = \frac{m_1 g}{\Delta L_1}.$$

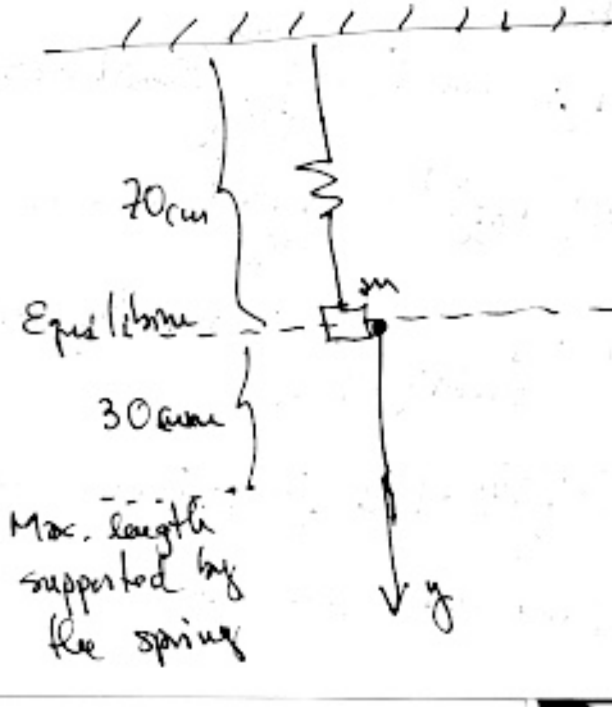
with $m_1 = \frac{1}{10}$ kg, $\Delta L_1 = \frac{1}{10}$ m, $g = 10\ m/seg^2$.

$$\Rightarrow k = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)\cdot 10}{1/10} \cdot \frac{N}{m} = \boxed{10\ N/m}$$

Once the first particle is removed, and the 2^{nd} one is attached $\left(m = \frac{2}{10} \text{kg}\right)$, the spring is stretched

$$\Delta L = \frac{mg}{k} = \frac{\left(\frac{2}{10}\right)\cdot 10}{10} = \frac{2}{10} \text{ meters}$$

So, at equilibrium, the total length of the spring is $\left(\frac{5}{10} + \frac{2}{10}\right) = \frac{7}{10}$ meters.



So, we have Newton's law:

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = 0.$$

with initial data:

$$y(0) = 10\text{ cm} = \frac{1}{10}\text{ m}$$

$$\dot{y}(0) = 20\frac{\text{cm}}{\text{sec}} = \frac{2}{10}\frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

where, we have placed the y-axis pointing downwards.

If $y(t) \geq 30\,cm = \frac{3}{10}\,m$, then the spring breaks.

So, we have to solve the Diff. Eq'n:

$$\frac{2}{10}\ddot{y} + 2\dot{y} + 10y = 0$$

i.e. $$\ddot{y} + 10\dot{y} + 50y = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} 1)\text{ Linear} \\ 2)\text{ Homogeneous} \\ 3)\text{ Constant Coeff's} \end{array} \right.$$

$\Rightarrow y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 10r + 50 = 0 \Rightarrow r = -5 \pm 5i$

$\Rightarrow y(t) = e^{-5t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t)$ is the position of the particle

Now $\dot{y}(t) = -5e^{-5t}(C_1 \cos 5t + C_2 \sin 5t)$
$+ e^{-5t}(-5C_1 \sin 5t + 5C_2 \cos 5t)$

The initial conditions become: $y(0) = 1(C_1 \cdot 1 + 0) = \frac{1}{10}$
$\dot{y}(0) = -5C_1 + 5C_2 = \frac{2}{10}$

$\Rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{10}\text{ meter}} \quad C_2 = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10} + 5 \cdot C_1\right) = \frac{1}{5}\left(\frac{2}{10} + \frac{5}{10}\right)$

$$\boxed{C_2 = \frac{7}{50}\,m}$$

Then, the position of the particle is:

$$y(t) = e^{-5t}\left(\frac{1}{10}\cos 5t + \frac{7}{50}\sin 5t\right) = \frac{e^{-5t}}{50}(5\cos 5t + 7\sin 5t)$$

Now, the amplitude is $M = \sqrt{\left(\frac{5}{50}\right)^2 + \left(\frac{7}{50}\right)^2} = \frac{\sqrt{74}}{50}$ meter.

Thus:

$$y(t) = e^{-5t}\frac{\sqrt{74}}{50}\cos(5t - \varphi)\text{ meters}$$ (φ is not important here.)

Now: $y(t) = e^{-5t}\frac{\sqrt{74}}{50}\cos(5t-\varphi) \leq 1 \cdot \frac{\sqrt{74}}{50} \cdot 1 \approx \frac{8.6}{50} = \frac{17.2}{100}$ meter

This is less than 30 cm. The spring does <u>not</u> break.