DEPARTAMENTO DE CIENCIAS BÁSICAS

EXAMEN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Trimestre: 19O.-. Fecha: 17-03-20.-. Turno: Matutino.-. Grupo:_______

ALUMNO:____________________________________ Matrícula:______________

NOTA: La Evaluación GLOBAL consta de los ejercicios marcados al inicio con un ($\bullet N\%$). Todos las respuestas necesitan desarrollo o justificación.

PRIMERA PARTE

Resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

(1) ($\bullet$10%) $x^2\,y' + x\,y = e^x\,y^{-2}$; con $y(1) = 1$

(2) ($\bullet$10%) $e^x\,y\,dy - (e^{-y} + e^{2x-y})\,dx = 0$

3) ($\bullet$10%) $(3\,x^2\,y + y^2)\,dx + (3x^3 - y^2 + 4xy)\,dy = 0$

Resolver los siguientes problemas.

4) ($\bullet$10%) Un tanque contiene 100 *galones* de salmuera, con 10 *libras* de sal disuelta. Una salmuera que contiene 0.5 *lb* de sal por *gal* entra al tanque a razón de 6 gal/min. La solución adecuádamente mezclada se deja salir del tanque a razón de 4 gal/min. A partir del PVI que modela el problema, determine la cantidad $Q(t)$ de *lbs* de sal que hay en el tanque al cabo de t minutos. ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque al cabo de 30 minutos? ¿Cuál es la concentración de sal en dicho instante?

5) Una taza de café cuya temperatura es $190°F$ se coloca en un cuarto que tiene una temperatura constante de $65°F$. Dos minutos más tarde la temperatura del café es $175°F$. A partir del PVI que modela el problema, determine la temperatura $T(t)$ del café al cabo de t minutos. ¿Cuál es la temperatura del café al cabo de 10 minutos? ¿Cuánto tiempo deberá transcurrir para que el café tenga una temperatura de $150°F$?

SEGUNDA PARTE

1. ($\bullet$15%) Aplicando variación de parámetros, resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = \cos^2 2x$$

2. ($\bullet$15%) Aplicando coeficientes indeterminados, resolver la ecuación diferencial

$$y'' - 5y' + 6y = (2x + 1)\,e^{3x}$$

3. (•10%) Obtener la solución general de la ecuación diferencial $x\,y'' - (x+1)\,y' + y = 0$, considerando que $y_1 = e^x$ es una solución de ella.

4. Obtener la solución del problema

$$4y'' - 4y' + y = 53\operatorname{sen} 2x + 9\cos 2x \;\; ; \;\; y(0) = 3 \; , \;\; y'(0) = -2 \; ,$$

considerando que $y_p(x) = -3\operatorname{sen} 2x + \cos 2x$ es una solución particular de la **edo** no-homogénea.

TERCERA PARTE

1. (•20%) Un resorte de constante $k = 8$ N/m está conectado en uno de sus extremos a un cuerpo de masa $m = 2$ kg y en el otro a una pared. El sistema masa-resorte descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Considerando la posición inicial $x_0 = 0.4$ m y la velocidad inicial $v_0 = 4$ m/s

   (a) Obtener la posición instantánea $x(t)$ de la masa m en la forma alternativa $x(t) = A\operatorname{sen}(\omega t + \phi)$ y determinar la amplitud, el ángulo de fase, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante.

   (b) ¿En qué instantes pasa m por la posición de equilibrio? ¿Con qué rapidez?

2. Un cuerpo de masa $m = 2$ kg está unido a un resorte de constante $k = 2$ N/m y a un amortiguador de constante $c = 4$ Ns/m Considerando la posición inicial $x_0 = 1$ m y la velocidad inicial $v_0 = -3$ m/s

   (a) Calcular la posición $x(t)$ de la masa m y decir que tipo de movimiento amortiguado resulta.

   (b) ¿En qué instante pasa m por la posición de equilibrio? ¿Con qué velocidad?

3. Una masa de $1\,kg$ está unida a un resorte de constante $k = 5\,N/m$ y a un amortiguador de constante $c = 2\,N.s/m$. Además, sobre el sistema masa-resorte se aplica una fuerza externa $F_e(t) = 10\cos t$. Considerando la posición inicial $x_0 = 1\,m$ y la velocidad inicial $v_0 = 2\,m/s$, determinar la posición y la velocidad instantáneas del cuerpo en todo tiempo $t \geq 0$.

Firma:________________

EVALUACIÓN GLOBAL DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Trimestre 19-O Marzo 17 de 2020. Horario: 16:00-17:30 h Grupo: ________

Alumno: ______________________ **Matrícula:** ________________

El examen **global** consta de los problemas marcados con (♣). Quien presente una de las partes, deberá resolver todos los problemas correspondientes a esa parte. Los resultados deberán mostrar el procedimiento respectivo.

PRIMERA PARTE

1. ♣(10 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y' + \frac{y}{x+1} - \cos x = 0$$

2. ♣(10 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$(2xy + 2y^2 + 4y)\,dx + (y^2 - x^2 - 4x - 1)\,dy = 0, \quad y(0) = 1$$

3. ♣(10 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial

$$x^2 y' + 2y - y^{\frac{1}{2}} = 0$$

4. ♣(10 puntos) Un tanque cuya capacidad es de 300 galones contiene 200 galones de líquido en el cual se disuelven 10 libras de sal. Una salmuera que contiene 2 libras de sal por galón se bombea al tanque con una rapidez de 7 galones por minuto. La solución mezclada se bombea hacia afuera del tanque con una rapidez de 3 galones por minuto. a) Plantear el problema con valores iniciales. b) Hallar el número de libras $A(t)$ de sal que hay en el tanque después de 15 minutos. c) Hallar el número de libras $A(t)$ de sal que hay en el tanque en el instante en que está a punto de derramarse el líquido.

SEGUNDA PARTE

5. Resolver el siguiente problema de valores iniciales:

$$2y'' + 8y' + 6y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

6. ♣(10 puntos) Dada la ecuación diferencial siguiente

$$(2x+1)\,y'' + 4x\,y' - 4y = 0$$

y **una de sus soluciones** $y_1(x) = e^{-2x}$, encontrar otra solución linealmente independiente de la solución dada y obtener la solución general.

7. ♣(15 puntos) Resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' - y' - 2y = x + 3e^{-x}$$

8. ♣(15 puntos) Resolver la ecuación:

$$y'' + 25y = \tan(5x)\sec(5x)$$

TERCERA PARTE

9. ♣(10 puntos) Un cuerpo que pesa 8 lb alarga 8 ft un resorte, el cual está suspendido del techo. Al inicio el cuerpo se suelta desde un punto que está $\frac{1}{2}$ ft abajo de su posición de equilibrio, con una velocidad dirigida hacia abajo de $\frac{3}{2}$ pies/s

   a) Plantear el problema de valores iniciales y determinar el desplazamiento del cuerpo en función del tiempo.

   b) Expresar la solución en su forma alternativa.

   c) Obtener el instante en el que el cuerpo pasa por segunda vez por su posición de equilibrio y determinar la dirección en que se dirige en ese instante.

10. ♣(10 puntos). Una masa de 20 g hace que se estire un resorte una distancia de 5 cm. El resorte está conectado a un amortiguador de aceite cuya constante de amortiguamiento es de 400 dinas seg/cm. Se tira de la masa hacia abajo una distancia de 2 cm y se suelta.

    a) Plantear el problema de valores iniciales y determinar el desplazamiento de la masa en función del tiempo.

    b) Expresar la solución en su forma alternativa.

11. Cuando se cuelga una pesa de un resorte, éste se estira 6 pulgadas. Hay presente una fuerza amortiguadora cuya magnitud es la misma que la de la velocidad de la pesa. Se aplica al resorte una fuerza externa igual a $2\,\mathrm{sen}\, 8t$. Si en $t = 0$ el peso es soltado desde un punto ubicado 3 pulgadas abajo de su posición de equilibrio, encontrar su posición a los 15 segundos de iniciado el movimiento.