

Temas selectos de Ingeniería Física:
**Sistemas dinámicos y epidemias. Modelación
matemática de epidemias de enfermedades
infecciosas.**

Profesor Jesús Adrián Espínola Rocha
Departamento de Ciencias Básicas
UAM-Azcapotzalco.
email: jaer@azc.uam.mx

24 de mayo de 2020.

1 Justificación.

Muchos de los fenómenos naturales y sociales presentan una dinámica que es no lineal. Muchos de ellos se presentan en las ciencias y en la ingeniería, por lo que es importante su estudio.

En este curso se pretenden estudiar algunos de estos sistemas sencillos que ayuden a la comprensión de sistemas más complicados. Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) y los sistemas dinámicos son buenas herramientas y permiten escribir modelos que nos ayuden a entender y describir estos fenómenos no lineales. Así pues, las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) serán la herramienta principal para hacer un estudio no lineal de estos sistemas.

En particular, la propagación de enfermedades infecciosas, volviéndose así una epidemia y, de esta manera, ser un sistema dinámico, se puede describir con el uso de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs). Se puede describir el crecimiento de individuos sanos, infecciosos, susceptibles, recuperados, entre otras categorías poblacionales relacionadas a la epidemia

Sistemas dinámicos con parámetros pueden dar lugar a bifurcaciones, que en el contexto de epidemias es conocido con el nombre de *brotes epidémicos*. El estudio abstracto de bifurcaciones de puntos críticos de soluciones estacionarias de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) ayuda a explicar los brotes.

Hay otros modelos en los cuales se incluyen los efectos de vacunación en poblaciones y se estudia la atenuación de los contagios o la erradicación de la enfermedad. Otros más incluyen grupos de población. Todos estos son modelos más complejos e importantes, pero es fundamental estudiar primero los modelos más sencillos como se pretende en este curso.

2 Objetivos.

1. Aprender la importancia de los efectos no lineales en fenómenos naturales, en particular, en la propagación de enfermedades infecciosas (epidemias).
2. Aprender qué es un sistema dinámico con EDOs sencillas y clásicas en una y dos dimensiones
3. Estudiar sistemas de EDOs no lineales; linealización, análisis del comportamiento cualitativo; bifurcación de sus soluciones.

4. Estudiar sistemas de EDOs no lineales; aprender a linealizar, a efectuar el análisis del comportamiento cualitativo y aprender a encontrar bifurcaciones de sus soluciones estacionarias.
5. Aprender a modelar matemáticamente modelos sencillos de la propagación de enfermedades infecciosas (modelar epidemias) a través de eEDO no lineales dependientes de parámetros.
6. Resaltar la importancia de modelos matemáticos de fenómenos naturales en general y de epidemias de enfermedades infecciosas en particular. Esto en relación a la actual pandemia de covid-19.

3 Pre-requisitos

Se les pide a los estudiantes como pre-requisito tener:

1. un sólido conocimiento de Cálculo Diferencial e Integral, así como de
2. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
3. Se necesitan también los cursos de Complementos de Matemáticas y Álgebra Lineal : operaciones y álgebra de matrices, cálculo de determinantes y trazas, y de valores y vectores propios de una matriz.
4. El curso de Matemáticas Aplicadas para la Ingeniería (MAPI) es recomendable, no por los contenidos en sí, sino como práctica formativa y experiencia para saber qué es una EDO, qué es una solución de una EDO y para resolver EDOs.

4 Temas.

1. **Sistemas dinámicos en una dimensión espacial.** (Dos semanas).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Estudiar EDOs no lineales y el comportamiento cualitativo de sus soluciones.
- Puntos fijos. Linealización de una EDO no lineal alrededor de sus puntos fijos. Caracterización lineal de los puntos fijos. Puntos hiperbólicos y no hiperbólicos.
- Estudiar sistemas en los que la variable dependiente es periódica.

CONTENIDO:

- (a) Flujos en una dimensión. EDOs lineales. EDOs no lineales: puntos fijos y linealización.
- (b) Estabilidad lineal y caracterización de puntos fijos. Puntos hiperbólicos y no hiperbólicos.
- (c) Modelos poblacionales sencillos: Malthus y logístico.
- (d) Flujos periódicos en una dimensión.

2. **Sistemas dinámicos en dos dimensiones espaciales.** (Tres semanas).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Extender los conceptos del Tema 1 a dos dimensiones.
- Aprender a clasificar sistemas lineales.
- Aprender a linealizar un sistema no lineal alrededor de un punto fijo y clasificarlo.
- Estudiar ejemplos de sistemas no lineales planos.

CONTENIDO:

- (a) Sistemas de dos EDOs lineales, sus puntos fijos y su clasificación. Planos fase.
- (b) Sistemas de dos EDOs no lineales: puntos fijos y linealización.
- (c) Modelos sencillos de poblaciones en dos dimensiones: modelo predador-presa.
- (d) Ejemplos: el péndulo y sistemas conservativos.
- (e) Sistemas dependientes de un parámetro: bifurcaciones en dos dimensiones.

3. Bifurcación de soluciones estacionarias de sistemas dinámicos. (Dos semanas).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Estudiar EDOs no lineales dependientes de un parámetro.
- Aprender qué es una bifurcación.
- Estudiar EDOs dependientes de un parámetro y las bifurcaciones de sus puntos críticos.
- Estudiar sistemas de dos EDOs dependientes de un parámetro y determinar las bifurcaciones de sus puntos fijos.

CONTENIDO:

- (a) EDOs dependientes de un parámetro.
- (b) Bifurcaciones en una dimensión: Silla-nodo; transcítica y de tenedor.
- (c) Ejemplos: umbrales en un láser: movimiento de una cuenta en un cable con fricción; brote de insectos.
- (d) Sistemas de EDOs no lineales dependientes de un parámetro.
- (e) Bifurcaciones en dos dimensiones: Silla-nodo; transcítica y de tenedor.
- (f) Bifurcación de Hopf.

4. Modelación matemática de epidemias. (Cuatro semanas).

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Aprender a realizar modelos poblacionales sencillos.
- Aprender a modelar modelos poblacionales con una enfermedad que se convierte en epidemia.
- Aprender el modelo epidémico: modelo de Kermack y McKendrick.
- Aprender los modelos más sencillos de enfermedades infecciosas: SIR, SIRS, SIR endémico, MSEIR.

CONTENIDO:

- (a) Revisar los modelos de Malthus, logístico y predador-presa.
- (b) Modelo de Kermack y McKendrick.
- (c) El modelo SIR: Susceptibles, infectados, recuperados.
- (d) El modelo SIR endémico.
- (e) El modelo SIRS: Susceptibles, infectados, recuperados, susceptibles.
- (f) El modelo MEIRS: individuos con inmunidad materno, individuos expuestos, infectados, recuperados, susceptibles.
- (g) Bifurcaciones como representación de brote epidémicos.

5 Bibliografía.

BIBLIOGRAFÍA NECESARIA Y RECOMENDABLE:

1. S. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos. With applications to physics, biology, chemistry an engineering.* Westview Press.
2. Hirsh, Smale and Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems & an introduction to Chaos.* Elsevier Academic Press.
3. P. Blanchard, G.R. Hall and R.L. Devaney. *Differential Equations.*
4. H.W. Hethcote. *The mathematics of infectious diseases.* SIAM Review.Vol 42. No. 4. (2000). pp 599-653.
5. W.O. Kermack and A.G. McKendrick. *Contributions to the mathematical theory of epidemics ? I.* (1927). Prog. Roy. Soc. 115A, p 700.

BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL:

1. Paul Glendinning. *Stability, Instability and Chaos: an introduction to the theory of nonlinear differential equations.* Cambridge University Press
2. Smith and Jordan. *Nonlinear Differential equations: an introduction to dynamical systems.* Oxford University Press
3. Perko. *Differential equations and Dynamical systems.* Springer.

6 Generalidades

MODALIDADES DE CONDUCCIÓN DEL PROCESO DE ENSEÑANZA-APRENDIZAJE

- Se efectuarán exposiciones cada clase por parte del profesor y se pedirá a los estudiantes una participación activa en las mismas.
- Esto es, se les har preguntas, se les pedir pasar al pizarrn para resolver sus dudas, as como tambn participar preguntando para aclarar conceptos expuestos en clase.

INFORMACIÓN ADICIONAL

- Se les pide a los estudiantes como pre-requisito tener un sólido conocimiento de Cálculo Diferencial e Integral, así como de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- El curso de Matemáticas Aplicadas para la Ingeniería es recomendable, no por los contenidos en sí, sino como práctica formativa para resolver ecuaciones diferenciales.

MODALIDADES DE EVALUACIÓN

- Se dejarán tareas semanales o quincenales.
- Se asignará un trabajo (proyecto) trimestral que consistirá en estudiar un artículo sobre sistemas dinámicos aplicados a epidemias.
- Se contemplan dos exámenes para los temas 1, 2 y 3. Se propone evaluar el Tema 4 con una tarea-examen.

INFORMACIÓN ADICIONAL